MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE
L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,
DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COIMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER),
DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR
Henri VILLAT
Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXVI

Le Problème des n corps en relativité générale

Par M. Tullio LEVI-CIVITA
Membre de l'Institut.



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55.

1950

MÉMORIAL

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

134875 — PARIS, IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, quai des Grands-Augustins.

MÉMORIAL
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES

PUBLIÉ SOUS LE PATRONAGE DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE PARIS,

DES ACADÉMIES DE BELGRADE, BRUXELLES, BUCAREST, COÏMBRE, CRACOVIE, KIEW, MADRID, PRAGUE, ROME, STOCKHOLM (FONDATION MITTAG-LEFFLER), DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE, AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

DIRECTEUR

Henri VILLAT

Membre de l'Institut,
Professeur à la Sorbonne,
Directeur du « Journal de Mathématiques pures et appliquées ».

FASCICULE CXVI

Le Problème des n corps en relativité générale

Par M. Tullio LEVI-CIVITA
Membre de l'Institut.



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55

1950

Le présent fascicule devait paraître pendant la dernière guerre mondiale. Son impression s'est trouvée retardée par les événements connus de tous. Il nous a semblé, après la disparition du savant Auteur, que nous devions publier le travail tel que T. Levi-Civita l'avait considéré comme achevé.

La Rédaction.

LE

PROBLÈME DES *n* CORPS
EN RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Par M. Tullio LEVI-CIVITA
Membre de l'Institut.

PRÉFACE.

Plusieurs fascicules de cette Collection de monographies, dirigée par M. Villat, sont dédiés à la Relativité.

D'abord les expositions d'ensemble dues à M. De Donder (n°s 8, 14, 43, 58) et ensuite celles qui sont plus particulièrement dédiées à la gravitation einsteinienne, de M. Georges Darmois (n° 25) et de M. Haag (n° 46) sur le problème de Schwarzschild.

Le présent fascicule se rattache par son sujet aux deux derniers, mais il a été conçu et rédigé de manière à pouvoir être lu et suivi par quiconque possède les principes du Calcul différentiel absolu et de la Relativité, soit d'après les expositions originales d'Einstein, Weyl, Eddington, soit dans les excellents Ouvrages français de M. Cartan [1] (pour tout ce qui se rapporte aux théories mathématiques) et de M. Chazy [2] (Relativité et Mécanique céleste), soit naturellement dans le livre de M. Levi-Civita, *Absolute differential Calculus*, Blackie, Glasgow and London, 1927, où sont réunis les Mémoires

[1] *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, Gauthier Villars, 1928.
[2] *La théorie de la Relativité et la Mécanique céleste*, Paris, Gauthier-Villars, t. 1, 1928; t. 2, 1930.

originaux italiens : *Calcolo differenziale assoluto* et *Fondamenti di meccanica relativistica*, Bologna, Zanichelli.

Quant au présent fascicule, il est à peine nécessaire, d'après son titre, d'avertir qu'on aspire à fixer le plus élémentairement possible l'aspect relativistique de ce qui avait été regardé par Newton et ses premiers continuateurs comme le clou de la Mécanique céleste ordinaire.

Nous y supposerons naturellement connus les principes généraux de la Relativité qui solidarisent tous les phénomènes et permettent en particulier, se bornant à un milieu gravitant, d'établir des équations aux dérivées partielles qui en régissent le mouvement.

On reconnaît dans ce programme (étant sous-entendu le recours éventuel aux ressources mathématiques dont on aura besoin) le même concept directeur d'où l'on tire la Mécanique céleste ordinaire en s'appuyant sur la loi de l'attraction newtonienne entre couples de particules et la loi également newtonienne du mouvement de chaque particule du milieu.

On peut, d'après cela, appliquer en Mécanique ordinaire le principe de réaction et réduire l'étude du mouvement de plusieurs — disons n — corps, soumis à la gravitation mutuelle, à celui de leurs centres de gravité : d'où les équations différentielles ordinaires du problème des n corps. Le cas le plus simple $n = 2$ a été, non seulement posé, mais substantiellement résolu par Newton lui-même.

Pour $n > 2$ l'intégration ne réussit qu'exceptionnellement et il faut avoir recours à des méthodes d'approximation (théorie des perturbations) dominant toute l'Astronomie.

Puisque les modifications de la théorie de la relativité, si grandioses et profondes qu'elles soient en principe, donnent lieu, dans les cas ordinaires, à des divergences quantitatives presque inappréciables, on est sûr d'avance de pouvoir envisager les problèmes susdits dans leur aspect classique avec des corrections complexes et nombreuses, mais généralement très petites, provenant de la conception supérieure d'où l'on part.

Il y a bien un cas éclatant, où la nouvelle théorie a pu être appliquée rigoureusement jusqu'au bout. C'est, pour employer le langage newtonien ordinaire, le problème des deux corps, dans l'hypothèse limite que l'un deux est infiniment petit et l'autre doué de symétrie sphérique, problème de Schwarzschild, regardé à juste titre, à cause

de son extrême importance, comme le résultat le plus précieux de la théorie einsteinienne, d'où l'on peut même tirer presque toutes les pierres de touche (*voir* en particulier, Mémorial, fasc. n° 46, de M. Haag, spécifiquement dédié à ce problème).

Dès qu'on sort du problème susdit, que l'on pourrait dire des deux corps, dont toutefois un infinitésimal (et l'autre sphérique), il paraît qu'on doive renoncer à tout espoir d'aborder rigoureusement, d'après la Relativité générale, les questions envisagées ordinairement en Mécanique classique.

Même le problème des deux corps, épuisé jadis par Newton, n'a quelque chance de succès.

C'est que dans le schéma relativiste, il n'y a plus le principe de réaction et l'on ne sait comment s'y prendre pour commencer à réduire les équations aux dérivées partielles (14 avec autant d'inconnues, dans la position du problème; *voir* Chap. II ci-après) à des équations différentielles ordinaires, sinon à les intégrer.

On doit partant renoncer à une étude rigoureuse et se contenter de procéder par approximations successives.

C'est Einstein (¹), lui-même, qui a fait le premier pas en intégrant ses équations moyennant les potentiels retardés à condition d'y retenir les seuls termes linéaires. Il a révélé, entre autres, l'existence des ondes gravitationnelles. Presque en même temps, M. Droste (²) a appliqué l'intégration par approximations successives aux équations générales de la matière mobile et gravitante. Les ordres de grandeur sont établis avec référence aux conditions usuelles de notre système planétaire et la méthode de calcul est conduite pour le problème des n corps avec des remarques qui simplifient la tâche d'obtenir, jusqu'au premier ordre, les corrections relativistiques dans les équations différentielles ordinaires.

De Sitter (³) a repris l'importante question dans son Mémoire *On Einstein's theory of gravitation and its astronomical consequences*. Dans la théorie newtonienne le mouvement du centre de gravité de

---

(¹) *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation Sitzungsber. der Preuss. Ak. der Wiss.*, 1916, p. 688-696.

(²) *The field of moving centres in Einstein's theory of gravitation* (*Ak. van Vet. te Amsterdam*, vol. 19, 1926, p. 447-455).

(³) *Monthly Notices of the R. A. S.*, particulièrement vol. 67, 1916, p. 155-183.

chaque corps C est influencé par l'attraction des autres corps, *non* par le corps lui-même. Il n'en est pas ainsi, même dans un schéma relativistique approché, quoique De Sitter exprime la conviction que la contribution de C sur lui-même se traduit simplement par une légère modification des valeurs constantes des masses, et pas d'autres influences en suivraient pour les équations finales.

Il convient de rappeler encore que Marcel Brillouin ([1]) dès 1922 faisait remarquer que les raisons que l'on a, en gravitation newtonienne, d'effacer ce qui provient du corps mobile pour déterminer le champ de force qui le meut, ne paraissent pas aussi évidentes dans l'espace einsteinien pour un corps ou point matériel de masse finie.

Néanmoins c'est à ce point de vue que De Sitter s'était posé. Ses formules sont valables pour un corps infiniment petit dans le champ de plusieurs autres corps en mouvements donné, mais non, sans discussion préalable, pour prédire les influences mutuelles d'un système de corps célestes.

Ensuite ([2]), on a bien mis en évidence les hypothèses additionnelles au prix desquelles le problème des n corps pouvait finalement être réduit au type, concevable *a priori*, des équations différentielles classiques avec termes additionnels de correction einsteinienne.

Pour $n = 2$, le problème non troublé est classiquement intégrable et l'on est alors réduit à calculer et à interpréter la perturbation. C'est ce que nous allons précisément développer à la fin de notre exposé.

Avant de terminer cette préface, il nous faut présenter quelques remarques d'ordre historique.

Dans le second article de l'*American Journal* ([3]), il avait été annoncé que la correction einsteinienne du problème des deux corps entraînait une accélération séculaire de leur centre de gravité, qui se serait déplacé sur la ligne des apsides commune aux orbites (non

---

([1]) *Gravitation einsteinienne. Statique. Point singuliers. Le point matériel* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 175, 1922, p. 1008-1012).

([2]) Levi-Civita, *The relativistie problem of several bodies* (*American Journal of Mathematics*, vol. 69, n° 1, 1937); *Astronomical consequences of the relativistic two-fody problem*, (*ibid.*, n° 2, 1937).

([3]) Levi-Civita, *The relativistic problem of several bodies* (*American Journal of Mathematics*, vol. 69, n° 1, 1937); *Astronomical consequences of the relativistic two-fody problem*, (*ibid.*, n° 2, 1937).

troublées) des deux corps. Cette conclusion hâtive provenait uniquement d'une erreur matérielle de calcul (dont la marche, reproduite ici, était toutefois parfaitement correcte).

MM. Einstein, Infeld et Hoffmann (¹) ont abordé le problème d'une manière toute différente, en réduisant le problème relativistique des n corps à un cas particulier d'une nouvelle théorie du déplacement des singularités pouvant affecter les solutions de certaines équations aux dérivées partielles.

Idée lumineuse, mais exigeant à l'heure actuelle des calculs extrêmement longs et compliqués (*voir* p. 88 du Mémoire cité).

M. Robertson (²) l'a toutefois appliquée à l'accélération du centre de gravité en arrivant à la conclusion exacte que, contrairement à l'affirmation annoncée dans l'article susdit (*Astronomical conséquences of the relativistic two-body problem*), *il n'y a pas d'accélération séculaire.*

Presque en même temps l'existence d'une telle accélération séculaire a été exclue par MM. Eddington et Clark (³) en s'appuyant sur les équations de De Sitter (dûment corrigées, et simplifiées par une application intuitive du principe de réaction).

Nous nous efforcerons au contraire de souligner dans notre exposition tous les passages logiques, et de développer les calculs de façon qu'on les puisse suivre sans le moindre effort.

Une analyse très soignée des circonstances permettant d'aborder une résolution par approximations successives du problème relativistique des milieux continus soumis aux équations gravitationnelles a été accomplie et publiée récemment par M. Fock (⁴). A certains égards il a poussé l'approximation au delà du but que nous nous sommes proposé, ayant en vue surtout le problème d'un nombre fini et notamment de deux corps séparés. Il n'a pas toutefois abordé les applications.

(¹) *The gravitational equations and the probleme of motion* (*Annals of Math.*, vol. 39, 1938, p. 65-100).

(²) *Note on the preceding paper : the two body problem in general relativity* (*ibid.*, p. 101-104).

(³) *The problem of n bodies in general relativity theory* (*Proc. Roy. Soc. London*, S. A., n° 927, vol. 166, 1938, p. 465-475).

(⁴) *Sur le mouvement des masses finies d'après la théorie de gravitation einsteinienne* (*Journal of physic, Academy of Sciences of the U. S. S. R.*, vol. 1, n° 2, 1939).

CHAPITRE I.

GRAVITATION EINSTEINIENNE.

1. — Espaces de Riemann. Espace-temps.

1. Indications historiques. — Riemann ([1]) en 1854 a introduit dans la Science la notion générale d'un espace ou variété métrique à n dimensions en posant *a priori* comme carré de la distance de deux points infiniment voisins une forme quadratique des différentielles des coordonnées x^i

$$ds^2 = \sum_{ik}^{n} a_{ik}\, dx^i\, dx^k, \tag{I.1}$$

dont les coefficients $a_{ik} = a_{ki}$ sont des fonctions arbitraires des variables $x^i (i = 1, 2, \ldots, n)$.

Ce point de vue avait été adopté par Gauss dans ses célèbres *Disquisitiones circa superficies curvas* pour développer la géométrie différentielle d'une surface indépendamment des propriétés de l'espace où la surface est immergée.

La géométrie de l'espace riemannien défini par l'élément linéaire (I.1) est évidemment invariante vis-à-vis d'un changement arbitraire des coordonnées x^i, appliqué, bien entendu, au ds^2 lui-même.

Nous supposons connus les premiers principes du calcul différentiel absolu, nécessaire à opérer systématiquement sur les espaces de Riemann.

2. Paramètres et moments d'une direction. Géodésiques. — Étant donné un point P de l'espace (I.1) de coordonnées x^i, soit P′ un point infiniment voisin de coordonnées $x^i + dx^i$. La direction PP′ issue de P est caractérisée par les paramètres

$$\lambda^i = \frac{dx^i}{ds} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{I.2}$$

([1]) *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Habilitationsschrift (*Œuvres mathématiques de Riemann*, traduites par L. Langel, Paris, Gauthier-Villars, 1898).

ou par les moments

$$(\text{I}.2') \qquad \lambda_i = \sum_{k}^{n} a_{ik}\lambda^k \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

liés respectivement par les équations quadratiques

$$(\text{I}.3) \qquad \sum_{ik}^{n} a_{ik}\lambda^i\lambda^k = 1,$$

$$(\text{I}.3') \qquad \sum_{ik}^{n} a^{ik}\lambda_i\lambda_k = 1.$$

Les λ_i ou λ^i sont les composantes covariantes ou contrevariantes d'un même vecteur (tenseur simple) unitaire $\boldsymbol{\lambda}$, fonction du point P de l'espace ([1]).

Soit g une courbe de l'espace (I.1) qui joint deux points P_0 et P_1; g' une courbe infiniment voisine de g ayant mêmes extrémités P_0 et P_1 : on peut l'obtenir en déplaçant infiniment peu chaque point $P(x^1, \ldots, x^n)$ de g de sorte que $P'(x^1 + \delta x^1, \ldots, x^n + \delta x^n)$ soit la position de P après la déformation. Si la longueur de g est minimée parmi les courbes g' susdites, g' a même longueur que g, à des infiniment petits d'ordre supérieur près, c'est-à-dire la variation de la longueur de g est nulle

$$(\text{I}.4) \qquad \delta \int ds = 0.$$

On remarquera que cette équation variationnelle peut être satisfaite par des courbes qui ne réalisent pas le chemin le plus court de P_0 à P_1 : en tout cas on appelle géodésiques ses courbes intégrales.

3. Espace-temps d'après Einstein et Minkowski. — Une application à la philosophie naturelle des idées géométriques de Riemann, à laquelle Riemann et son école directe n'auraient pas songé, a été réalisée par Einstein avec sa théorie de la Relativité qui est née, comme il est bien connu, par une interprétation de la célèbre expérience de Michelson.

([1]) Nous désignerons par une lettre grasse une quantité vectorielle ou tensorielle selon l'usage courant dans le Calcul vectoriel ordinaire.

Cette théorie nous conduit d'abord à représenter, comme Lagrange l'a dit explicitement, les phénomènes mécaniques comme une sorte de géométrie d'un espace à quatre dimensions, le temps étant une des coordonnées. La métrique de cet espace-temps est conçue à la manière de Riemann, mais la forme quadratique ds^2 n'est pas définie, la différentielle du temps jouant, d'après Minkowski, un rôle algébriquement distingué.

4. La dynamique du point matériel et le principe géodésique. — Le fameux principe d'inertie de la Mécanique ordinaire postule que les mouvements d'un point matériel dans un champ nul, c'est-à-dire en absence de forces, sont rectilignes uniformes. C'est cette loi, inconnue aux philosophes avant Galilée, qui a été le point d'appui pour la construction de la dynamique classique tout entière.

Bien avant de fonder la théorie de la Relativité générale, Einstein [1] a étendu ce même principe, le domaine géométrique de sa construction étant un espace-temps dont la métrique soit *a priori* quelconque et liée, d'une manière quelconque qu'on laisse pour le moment indéterminée, aux phénomènes physiques qui s'y passent.

Si

$$ds^2 = \sum_{0}^{3}{}_{ik} g_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{I.5}$$

en désignant le carré de la distance de deux points infiniment voisins (intervalle élémentaire de l'espace-temps) x^0 étant le temps et x^1, x^2, x^3 les trois coordonnées spatiales, les mouvements d'un point matériel dans un champ donné (en particulier nul) ou inconnu sont caractérisés par l'équation variationnelle

$$\delta \int ds = 0, \tag{I.4}$$

donc représentés par les géodésiques de l'espace-temps envisagé (n° 2).

C'est là le principe géodésique d'Einstein. Il s'agit d'une équation invariante vis-à-vis d'une transformation arbitraire des coordonnées, y compris la variable x^0, ce qui fait la plus grande généralité du

---

(1) EINSTEIN-GROSSMANN, *Entwurf einer verallgemeinerten Relativitätstheorie und einer Theorie der Gravitation*, Leipzig und Berlin, Teubner, 1913, p. 38.

principe, vis-à-vis des transformations des coordonnées, n'impliquant pas le temps, habituellement envisagées.

Mais quelles sont les lois qui président à la construction de l'intervalle ds^2?

La réponse est fournie justement par la théorie de la Relativité générale, ce qu'Einstein a fait un peu plus tard. Pour aborder cette question d'une manière concrète il convient auparavant de rappeler quelques notions concernant le mouvement d'un milieu continu.

2. — Milieux continus.

1. Rappels élémentaires. — Les fondements géométriques et cinématiques de la Mécanique des milieux continus qui classiquement présupposent une métrique euclidienne de l'espace, où le phénomène du mouvement se passe, s'étendant aisément aux espaces de Riemann.

Nous rappelons ici les résultats qui vont nous intéresser dans cette monographie, à commencer par les tous premiers éléments. En premier lieu la notion de champ vectoriel dans l'espace euclidien ordinaire.

Le vecteur $\mathbf{v}$ du champ est caractérisé par ses composantes cartésiennes v_x, v_y, v_z que nous supposons des fonctions des coordonnées x, y, z et du temps t (champ non stationnaire). On obtient une image intuitive du champ en supposant que $\mathbf{v}$ soit la vitesse de l'élément matériel d'un système continu qui, à l'instant t, occupe la position $P(x, y, z)$.

La circonstance qu'il s'agit d'un système matériel dans le même champ est caractérisée par l'adjonction d'une fonction scalaire, la densité, qui multipliée par l'élément de volume dS de l'espace donne la masse de l'élément matériel qui occupe à l'instant t le volume dS.

On dit que dans la région envisagée de l'espace il y a un flux permanent, si la distribution des vitesses $\mathbf{v}$ ne dépend pas de t.

Les lignes de flux à l'intant t sont définies par ce fait que le long d'elles le vecteur $\mathbf{v}$ est partout tangent. Cette condition se traduit par le système différentiel

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z},$$

dont la congruence des courbes intégrales est invariable dans le temps si le flux est permanent.

2. Notion abstraite de matière et flux dans un espace de Riemann. — Soit maintenant un espace de Riemann à n dimensions dont (I.1) est l'élément linéaire.

Pour étendre l'image précédente, il suffit de se donner une congruence de lignes par un système différentiel

$$\frac{dx^1}{\lambda^1} = \frac{dx^2}{\lambda^2} = \ldots = \frac{dx^n}{\lambda^n}, \tag{I.6}$$

où les λ^i, fonctions des variables x^i, sont les paramètres de direction d'un élément quelconque, ou, plus généralement, proportionnels à ces paramètres. On indique par $d\tau$ la valeur commune des n rapports (I.6) en introduisant de la sorte un paramètre τ (défini à une constante additive près) pouvant servir à individualiser la position sur une ligne quelconque de la congruence (I.6) dont il s'agit. L'ensemble de ces lignes dépend de $n-1$ constantes arbitraires $c_\alpha (\alpha = 1, \ldots, n-1)$; il en passe une et une seule pour chaque point régulier [1] P du champ envisagé.

Nous devons maintenant, par une généralisation toute naturelle de ce qui se fait dans l'espace ordinaire, introduire encore une fonction scalaire $\varepsilon(P)$ du point P, ou, si l'on veut, des coordonnées x^i, à interpréter comme la densité d'une matière, ou d'une entité similaire, répandue dans l'espace susdit, comme il arrive dans quelques cas que nous considérerons dans la suite.

Les paramètres λ^i et la fonction ε pourront dépendre non seulement des x, mais aussi d'une autre variable t (le temps); mais dans les cas qui nous intéresseront le temps t sera une des variables x, et le rôle de paramètre fixant la position sur les lignes de la congruence sera joué par une autre quantité, par exemple l'auxiliaire τ, indiquée tout à l'heure.

Ceci posé, nous dirons qu'il y a un flux de matière dans l'espace dont on s'occupe, si, dV désignant l'extension (riemannienne) d'un domaine élémentaire environnant le point P, on convient d'attribuer à dV la masse (ou quantité de matière) $\varepsilon(P)\,dV$. Dès lors il suffit d'appliquer à cet espace les mêmes considérations, dont on se sert, dans les tout premiers principes de la Mécanique des milieux continus,

[1] Dans le sens ordinairement adopté en Mécanique (et en Géométrie), c'est-à-dire en regardant les λ des (I.6) comme fonctions dérivables autant qu'il le faut et non toutes nulles dans le domaine envisagé.

pour remonter du point de vue d'Euler à celui de Lagrange pour reconnaître que nous sommes désormais en mesure de suivre le mouvement d'un élément quelconque de ce que nous avons appelé matière.

En effet, l'intégration de (I.6) définit le mouvement de P sous la forme

$$P = P(c_\alpha, \tau)$$

et il suffit d'introduire cette expression lagrangienne de P dans la donnée $\varepsilon = \varepsilon(P)$ pour avoir l'expression, également lagrangienne, de ε (1).

Le flux permanent est caractérisé par les circonstances auxquelles on s'est rapporté ci-dessus, que les lignes de la congruence et la densité ε sont invariables (ne dépendent pas de t, considéré comme une variable en surplus des x).

3. **Lignes d'Univers ou lignes horaires.** — On appelle ainsi les trajectoires des éléments de matière dans un flux permanent de l'espace-temps. Cette locution étend à l'espace-temps la terminologie habituelle d'après laquelle, dans un mouvement d'un point de l'espace ordinaire, la courbe qui représente dans un plan cartésien t, s les variations dans le temps de l'abscisse curviligne s sur la trajectoire est appelée le diagramme horaire du mouvement (1).

Nous allons maintenant introduire les notions analytiques nécessaires pour traduire mathématiquement la condition de conservation de la masse pour un flux permanent (ou même non permanent) dans un espace de Riemann quelconque.

4. **Lemme de Green** (2). — Soit $f(x_1, \ldots, x^n)$ une fonction continue avec ses dérivées du premier ordre dans un champ $\mathcal{V}$ dont σ

---

(1) *Cf.* T. LEVI-CIVITA et U. AMALDI, *Compendio di meccanica razionale*, 2e édit., Bologna, Zanichelli, 1938; BELTRAMI, *Ricerche sulla cinematica dei fluidi* (*Opere*, t. 2, p. 202-379).

(1) *Cf.* M. LÉVY, *Éléments de Cinématique et de Mécanique*, Paris, E. Bernard, 1902.

(2) La formule célèbre d'après laquelle une intégrale étendue à un domaine de l'espace peut être transformée dans une intégrale étendue à la frontière du domaine a été établie pour la première fois par G. Green dans le Mémoire *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magne-*

est le contour. Convenons d'abord, pour fixer les idées, de nous rapporter à un espace riemannien doué d'une métrique définie.

On a

$$(\text{I}.7) \qquad \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial x^i}{\partial f} \frac{d\mathcal{V}}{\sqrt{a}} = -\int_{\sigma} f n_i \frac{d\sigma}{\sqrt{a}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où a est le discriminant de la forme (I.1) et n_i est le moment $i^{\text{ième}}$ correspondant à x^i de la normale à σ, dirigée vers l'intérieur de $\mathcal{V}$ (1).

Si l'on pose

$$d\varpi = dx^1\, dx^2 \ldots dx^n,$$

on a pour l'extension ou volume de l'élément $d\mathcal{V}$ du champ

$$d\mathcal{V} = \sqrt{a}\, d\varpi.$$

L'intégrale du premier membre est

$$(\text{I}.8) \qquad \int\int \cdots \int \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^1\, dx^2 \ldots dx^n.$$

Intégrons d'abord par rapport à la variable x^i en cherchant entre quelles limites doit s'effectuer l'intégration. Soit $d\sigma_i$ un élement de surface $x^i =$ const. et considérons le tube qui aurait cet élément pour base et dont la surface latérale est constituée par des lignes coor-

---

tism, Nottingham, 1828. Mais ce travail demeura inaperçu jusqu'à l'année 1846, lorsque Lord Kelvin en mit en évidence toute la valeur au moment où la pensée des mathématiciens et physiciens était orientée vers la théorie du potentiel que Gauss, indépendamment de Green, venait de fonder dans le Continent avec son célèbre Mémoire *Allgemeine Lehrsätze in beziehung auf die im verkerhrten Verhältnisse des Quadrats der Entfermung wirkenden Anzlehungs-und Abstossungs-Kräfte*, publié en 1840. Le travail de Green fut republié dans les tomes 39, 44, 47 du *Journal de Crelle* (1850, 1852, 1854) et une dernière fois dans les *Mathematical Papers* de Green, 1871.

La formule

$$\int_C X\, dx + Y\, dy = \int\int \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dx\, dy$$

a été démontrée par Riemann en 1851 dans sa thèse fameuse. L'illustre Auteur paraît y avoir ignoré les Mémoires de Green et Gauss. C'est pourquoi le théorème porte fréquemment le nom de Riemann.

(1) La fonction f peut dépendre aussi d'un nombre quelconque de paramètres.

(2) Dans le cas d'un espace-temps, le discriminant g de la forme (I.1) étant négatif dans la convention commune, il doit être remplacé par sa valeur absolue $-g$ dans les formules analytiques que nous établirons dans ce numéro et dans les suivants.

données x^i (le long desquelles varie seulement la variable x^i). Il découpe sur σ, en général, plusieurs éléments en entrant dans le champ (en M_e) et en sortant (en M_s). Le champ étant limité, le nombre des entrées et des sorties est pair et l'on a

$$\int \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i = \sum (f_s - f_e),$$

la somme étant étendue aux différences des valeurs de f dans les points M_s de sortie et M_e d'entrée.

L'intégrale de volume (I.8) devient donc

$$\int \sum (f_s - f_e)\, d\varpi', \tag{I.9}$$

ayant posé

$$d\varpi' = \frac{d\varpi}{dx^i}.$$

Or, la direction normale à la section droite du tube considéré est celle d'une ligne coordonnée x^i, donc tous ses paramètres sont nuls, sauf celui d'indice i, qui est donné par (¹)

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{1}{\sqrt{a^{ii}}}.$$

Si n_{ik} désigne les moments de la normale à σ_i, on a

$$n_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{\sqrt{a^{ii}}},$$

où le symbole bien connu δ_{ik} de Kronecker est défini par

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k). \end{cases}$$

D'autre part, en observant que $d\sigma$ et $d\sigma_i$ sont découpés par un même tube, subsiste la relation

$$d\sigma\,|\cos(\mathbf{n}, i)| = d\sigma_i\,|\cos(\mathbf{n}_i, i)|, \tag{I.10}$$

où les vecteurs $\mathbf{n}$ et $\mathbf{n}_i$ désignent les directions normales à σ et σ_i.

(¹) On rappelle que a^{jk} est l'élément réciproque de a_{ik}, c'est-à-dire le complément algébrique divisé par le discriminant a.

En multipliant les deux membres de (I.10) par $\sqrt{a^{ii}}$, on a

$$(I.11) \qquad d\sigma\,|\,n_i\,| = \frac{d\sigma_i}{\sqrt{a^{ii}}},$$

n_i désignant les moments de la normale à σ intérieure à $\mathcal{V}$.

Dans la formule

$$n_i = \sqrt{a^{ii}}\cos(\mathrm{n},\, i),$$

le signe positif du radical s'accorde avec le sens des x^i croissantes le long des lignes coordonnées.

Or on a

$$(I.12) \qquad d\sigma_i = \sqrt{aa^{ii}}\,d\varpi',$$

donc

$$(I.13) \qquad d\varpi' = \frac{1}{\sqrt{a}}\,|\,n_i\,|\,d\sigma;$$

en substituant cette expression dans l'intégrale envisagée, on obtient le second membre de la formule annoncée.

5. **Théorème de la divergence.** — Si $\mathbf{n}$ est le vecteur unitaire de la normale à σ au point $\mathrm{M}(x^1, \ldots, x^n)$ orientée arbitrairement, nous dirons que la quantité

$$(I.14) \qquad d\sigma\sum_1^n{}_i\,\lambda^i n_i = \boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{n}\,d\sigma,$$

où les λ^i sont les paramètres de la congruence d'un flux dans l'espace et n_i les moments de la normale à σ, est *le flux à travers* $d\sigma$ (dans l'unité de temps). La surface σ étant fermée, si $\mathbf{n}$ est la normale intérieure au champ $\mathcal{V}$ qu'elle entoure, l'intégrale

$$(I.15) \qquad \int_\sigma \boldsymbol{\lambda}\times\mathbf{n}\,d\sigma$$

est le flux entrant à travers σ.

Ceci posé, supposons que $\mathbf{v}$ soit un vecteur dont v^i sont ses composantes contrevariantes.

On sait que si $\mathbf{v}$ est un vecteur de l'espace euclidien dont $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$, $v_z(x, y, z)$ sont les composantes cartésiennes, l'expression différentielle

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

est invariante vis-à-vis d'un changement des coordonnées cartésiennes et s'appelle la divergence du vecteur $\mathbf{v}$. Cette notion s'étend à un espace riemannien quelconque lorsqu'on pose

$$\text{(I.16)} \qquad \operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{1}^{n}{}_{i} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{a}\, v^i),$$

le second membre étant un invariant au sens général, c'est-à-dire vis-à-vis d'un changement arbitraire des variables x.

La notion de divergence s'étend aussi, du cas d'un vecteur dans lequel elle est un invariant scalaire au cas d'un tenseur. Dans ce cas la divergence est un tenseur d'un rang inférieur d'une unité [1]. MM. Schouten et Struik dans leur récente *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie* [2], diraient « valence » (Bd. I, p. 7).

Or on a, en vertu du lemme de Green

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v}\, d\mathcal{V} = \sum_{1}^{n}{}_{i} \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{a}\, v^i) \frac{d\mathcal{V}}{\sqrt{a}} = -\sum_{1}^{n}{}_{i} \int_{\sigma} v^i n_i\, d\sigma = -\int_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n}\, d\sigma,$$

où $\mathbf{n}$ désigne la normale intérieure à $\mathcal{V}$.

La formule

$$\text{(I.17)} \qquad \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \mathbf{v}\, d\mathcal{V} = -\int_{\sigma} \mathbf{v} \times \mathbf{n}\, d\sigma$$

constitue le célèbre théorème de la divergence qui joue un rôle fondamental dans la Mécanique des milieux continus et dans la Physique mathématique.

6. Expression analytique du principe de conservation de la masse. — Il s'agit d'exprimer que dans un flux quelconque la masse reste invariable, c'est-à-dire que la masse qui à un instant quelconque, c'est-à-dire pour une valeur quelconque du paramètre τ, occupe une région de l'espace est invariante pendant le mouvement de la matière. On suppose que le mouvement soit partout régulier.

---

(1) *Cf.* T. Levi-Civita, *Absolute differential calculus*, p. 153-155, Blackie and son limit., London and Glasgow, 1927.

(2) Groningen, Noordhoff, Bd. I, 1935, Bd. II, 1938.

Nous suivrons le point de vue eulérien en calculant de deux manières la variation totale de la masse qui se produit de τ à $\tau + d\tau$ dans une région fixe $\mathcal{V}$ de l'espace et en égalant, après, les résultats.

On a d'abord que cette variation est

$$d\tau \int_{\mathcal{V}} \frac{d\varepsilon}{d\tau} \, d\mathcal{V}.$$

D'autre part s'il y a eu variation de masse dans $\mathcal{V}$, c'est parce que de la matière a traversé la surface σ qui entoure $\mathcal{V}$ et le flux total pendant l'intervalle élémentaire $d\tau$ est

$$d\tau \int_{\sigma} \varepsilon \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{n} \, d\sigma = - d\tau \int_{\mathcal{V}} \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{\lambda}) \, d\mathcal{V},$$

en vertu du théorème de la divergence.

Donc, on a

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{\lambda}) \right] d\mathcal{V} = 0,$$

d'où l'on tire, d'après un raisonnement bien connu, l'équation de continuité ou de la conservation de la masse

(I.18) $$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{\lambda}) = 0.$$

7. **Spécification des notions précédentes dans l'espace-temps.** — Les considérations qu'on vient de développer pour un espace de Riemann à métrique définie s'étendent sans peine ([1]) à un espace-temps.

Néanmoins, dans ce cas, nous supposons que les vecteurs, tenseurs ou fonctions scalaires dont il s'agit, dépendent seulement des coordonnées x^0, x^1, x^2, x^3, la variable t étant remplacée par x^0. Par conséquent, il ne sera pas question ici que de flux permanents et l'équation de conservation de la masse pour un tel flux devient

(I.19) $$\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{\lambda}) = 0.$$

([1]) Nous n'aurons pas besoin d'envisager les circonstances particulières qui peuvent se présenter pour une métrique indéfinie lorsqu'on a exceptionnellement affaire avec des variétés isotropes (de longueur nulle).

Il faut remarquer que la congruence des lignes qui est, pour ainsi dire, le siège du flux, est caractérisée par le système différentiel (I.6) qui, dans ce cas, peut être posé sous la forme

$$\text{(I.20)} \qquad \frac{dx^i}{ds} = \lambda^i(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

où la variable indépendante (appelée τ en général) s'identifie ici avec l'arc s (d'une courbe intégrale quelconque) compté (sur chaque courbe) à partir d'un point arbitraire, et lié aux x et leurs différentielles dx par (I.5) [ou, en particulier, (I.1) s'il s'agit d'un espace riemannien proprement dit à métrique définie].

Un cas particulier très important pour notre but est celui des congruences géodésiques, dont nous nous occuperons dans les prochains numéros.

8. **Quelques remarques sur les dimensions.** — L'équation de continuité (I.19) est, comme on va voir, liée à l'existence d'un invariant intégral qui sera très important pour l'application que nous en avons en vue.

Nous allons l'établir et développer quelques considérations qui s'y rattachent.

Mais il convient d'abord de faire une observation préliminaire.

Si une certaine entité physique q (énergie, matière, chaleur, etc.) se déplace dans une variété (en général riemannienne) de coordonnées $x^0, x^1, \ldots, x^n$ en décrivant une congruence de lignes horaires, nous désignerons par λ^i ($i = 0, 1, \ldots, n$) les paramètres de la congruence et par $\boldsymbol{\lambda}$ le vecteur correspondant du champ. Soit $d\sigma$ un élément de surface ([1]) normal, dans un point quelconque P à la ligne horaire $\boldsymbol{\lambda}$ qui passe par P. On dira densité de courant (de l'entité q) à un instant donné, un nombre ε tel que

$$\varepsilon \, d\sigma \, dt$$

représente la quantité de q qui s'écoule à travers $d\sigma$ de l'instant t à l'instant $t + dt$.

On doit alors retenir $\varepsilon \, d\sigma \, dt$ homogène à q et les dimensions de $\varepsilon \, d\sigma$ seront

$$[q] t^{-1}$$

([1]) Nous disons « surface », comme dans l'espace ordinaire, quoiqu'il s'agisse d'une variété à n dimensions (l'espace ambiant étant à $n+1$ dimensions).

et non

$$[q].$$

Si l'on veut que $\varepsilon \, d\sigma$ soit une énergie, les dimensions de q devront être

$$ml^2 t^{-2} t = ml^2 t^{-1},$$

c'est-à-dire celles d'une action. Il s'agirait donc de flux d'action.

Si l'on envisage un espace-temps et l'on emploie le temps römerien x^0, ayant les dimensions d'une longueur, au lieu du temps ordinaire, q serait homogène à une énergie-longueur, c'est-à-dire de dimensions

$$ml^3 t^{-2}.$$

9. **Forme de l'équation de continuité ayant un intérêt particulier pour la Mécanique relativistique.** — Ceci posé, considérons un flux permanent dans un espace-temps et l'équation (I.19). Comme il est bien connu (¹), cette équation veut dire que l'intégrale

$$\int \varepsilon \, d\mathcal{V},$$

où

$$d\mathcal{V} = \sqrt{-g} \, dx^0 \, dx^1 \, dx^2 \, dx^3$$

et $-g$ est le discriminant de l'élément linéaire (I.5), est un invariant par rapport aux équations

$$\text{(I.20)} \qquad \frac{dx^i}{ds} = \lambda^i \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

de la congruence géodésique ou des lignes horaires.

Nous pouvons exprimer ce fait sous une forme particulièrement utile pour les développements ultérieurs, en envisageant comme domaine d'intégration un champ élémentaire choisi de la façon suivante :

Considérons une tranche élémentaire de l'espace-temps dont l'épaisseur soit ds, orthogonale initialement à une ligne horaire quelconque.

Observons d'abord que, lorsqu'on suit le flux quadri-dimensionnel,

(¹) *Cf.* T. LEVI-CIVITA et Ugo AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, t. II₂. Cap. X, Bologna, Zanichelli.

dans lequel le champ élémentaire d'intégration subit une déformation particulière, on peut imposer à la variable indépendante s des accroissements ds constants, ce qui revient à une épaisseur invariable de la tranche élémentaire (non plus nécessairement perpendiculaire à la ligne). Cela tient à ce que si l'on envisage un déplacement infiniment petit sur une courbe donnée (dans un espace riemannien quelconque), tel que le module du déplacement de chaque point soit le même pour tous les points de la courbe, une variation, même finie, Δs de la variable s est un invariant de la déformation.

En effet, la condition posée entraîne l'équation

$$s' = s + c \qquad (c = \text{const.})$$

satisfaite le long de la courbe, d'où l'on tire

$$\text{arc}\,\mathrm{PP}_1 = \text{arc}\,\mathrm{P}'\mathrm{P}'_1,$$

si P', P'_1 sont les points P, P_1 après le glissement le long de la ligne horaire.

Les considérations précédentes conduisent à poser l'invariant intégral sous la forme

$$\varepsilon\sqrt{-g}\,d\mathrm{S}\,\frac{dx^0}{ds}\,ds = \text{const.}, \tag{I.21}$$

où

$$d\mathrm{S} = dx^1\,dx^2\,dx^3$$

et à retenir pour invariant l'expression

$$\eta\,d\mathrm{S}$$

ayant dénoté par

$$\eta = \varepsilon\sqrt{-g}\,\frac{dx^0}{ds} \tag{I.22}$$

une quantité qui, comme ε, a les dimensions d'une densité d'énergie.

10. Mouvement géodésique. — En développant l'équation variationnelle (I.4) d'après les procédés bien connus du Calcul des variations et différentiel absolu, on trouve que les géodésiques d'un espace riemannien sont définies par un système différentiel

$$\frac{d\lambda^i}{ds} + \sum_{kl}^{n}{}_{1}\Gamma^i_{kl}\lambda^k\lambda^l = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{I.23}$$

où les Γ^i_{kl} sont visiblement les symboles de Christoffel de seconde espèce bien connus.

Ces équations expriment la propriété d'auto-parallélisme, d'après M. Levi-Civita, des géodésiques, ses premiers membres étant les composantes contrevariantes p^i du vecteur $\mathbf{p}$, courbure géodésique, c'est-à-dire

$$(\text{I}.24) \qquad p^i = \sum_1^n {}_k \left(\frac{\partial \lambda^i}{\partial x^k} + \sum_1^n {}_l \Gamma^i_{kl} \lambda^l \right) \lambda^k = 0.$$

On peut y mettre en évidence les dérivées covariantes des paramètres λ^i en écrivant

$$(\text{I}.25) \qquad p^i = \sum_1^n {}_k \lambda^i_{|k} \lambda^k,$$

où $\lambda^i_{|k}$ est la dérivée covariante de λ^i.

Dès lors les composantes covariantes du vecteur $\mathbf{p}$ sont données par

$$p_r = \sum_1^n {}_i a_{ir} p^i = \sum_1^n {}_k \left(\sum_1^n {}_i a_{ir} \lambda^i_{|k} \right) \lambda^k.$$

Mais, en vertu du lemme de Ricci, on a

$$\sum_1^n {}_i a_{ik} \lambda^i_{|k} = \sum_1^n {}_i (a_{ir} \lambda^i)_{|k} = \lambda_{r|k}.$$

Donc

$$(\text{I}.25') \qquad p_r = \sum_1^n {}_k \lambda_{r|k} \lambda^k.$$

On conclut que les géodésiques d'un espace-temps sont caractérisées par des paramètres λ^i ou par des moments λ_r définis respectivement par les équations

$$(\text{I}.26) \qquad p_i = \sum_0^3 {}_k \lambda^i_{|k} \lambda^k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ou bien

$$(\text{I}.26') \qquad p_r = \sum_0^3 {}_k \lambda_{r|k} \lambda^k = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

11. Résumé et introduction au paragraphe suivant. — Dans les représentations qui ont fait l'objet des pages précédentes, nous avons posé, indépendamment des lois de gravitation, les notions d'espace-temps métrique et de flux, en considérant l'espace-temps rempli d'une matière dont les éléments se déplacent le long des lignes d'une congruence donnée *a priori* (par exemple géodésique) constituant une configuration invariable ou permanente.

La conservation de la masse dans ce flux exige que la fonction ε, densité de matière (ou éventuellement d'une entité similaire) et le vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ soient liés par l'équation fondamentale

$$\text{(I.19)} \qquad \operatorname{div}(\varepsilon\boldsymbol{\lambda}) = 0.$$

Avant d'appliquer ces généralités à la Relativité générale, il convient de fixer particulièrement l'attention sur le cas où ε, dont on a laissé jusqu'à ce moment indéterminée la nature précise, serait notamment une densité d'énergie.

3. — Les équations gravitationnelles et le principe géodésique dans les milieux continus sans efforts intérieurs.

1. Équations d'Einstein. — Jusqu'à présent on n'a pas établi la loi reliant la métrique d'un espace-temps aux phénomènes qui s'y passent.

Ce fut le progrès capital réalisé par Einstein en 1916, dans son Mémoire (1) sur les idées générales exposées dans la petite brochure Einstein-Grossmann, de découvrir une telle loi en l'énonçant sous une forme indépendante des variables auxquelles on se rapporte.

Son contenu mathématique, incluant la loi de Newton en première approximation, s'exprime par les célèbres équations différentielles

$$\text{(I.27)} \qquad G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

où les inconnues principales sont les coefficients g_{ik} de l'intervalle ds^2 de l'espace-temps (I.5) qui y interviennent avec leurs dérivées du premier et second ordre dans l'expression du tenseur G_{ik} de courbure et son invariant G.

(1) *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* (*Ann. der Physik*, t. 49, 1916, p. 769.

La constante $\varkappa$ est donnée par la relation

(I.28) $$\varkappa = \frac{8\pi f}{c^4} \sim 2,071.10^{-48}\ \mathrm{g}^{-1}\ \mathrm{cm}^{-1}\ \mathrm{sec}^2,$$

où

$$f \sim 6,675.10^{-8}\ \mathrm{g}^{-1}\ \mathrm{cm}^3\ \mathrm{sec}^{-2}$$

est la constante (de Gauss) de la gravitation universelle (¹).

Ce sont là les dix équations fondamentales de la Relativité générale qui établissent une relation d'interdépendance entre la matière et le champ de gravitation dont la structure métrique différentielle est caractérisée par le tenseur G_{ik} et qui se réduisent substantiellement à l'unique équation de Poisson dans l'approximation newtonienne.

Il faut encore indiquer comment la matière en mouvement exerce son influence sur ces équations et, par conséquent, sur la métrique de l'espace-temps.

C'est naturellement le tenseur énergétique T_{ik} qui, suivant les cas, doit être rattaché aux autres éléments du problème dont il s'agit.

2. Milieux désagrégés. Tenseur énergétique correspondant. — Le cas le plus simple est celui de la matière désagrégée, ou, comme nous dirons, parfaite, c'est-à-dire d'un milieu continu dont les efforts intérieurs définis à la manière classique (Cauchy) sont négligeables. Un exemple typique est fourni par la matière cosmique (pulviscule) que les astronomes supposent avoir donné naissance aux corps célestes par un processus de condensation et que plusieurs savants pensent aujourd'hui constituer les nébuleuses.

Dans ce cas là, les composantes covariantes ou contrevariantes du tenseur énergétique $\mathbf{T}$ sont, d'après Einstein,

(I.29) $$T_{ik} = \varepsilon\lambda_i\lambda_k$$

ou respectivement

(I.29′) $$T^{ik} = \varepsilon\lambda^i\lambda^k,$$

où ε est la densité d'énergie et λ'_1 sont les moments (λ^i respectivement les paramètres) des lignes horaires de l'espace-temps, c'est-à-dire des lignes de la congruence du flux qui correspond dans l'espace-temps au mouvement de la matière dans l'espace physique.

(¹) Le signe $\sim$ signifie « à peu près ».

Il convient de remarquer tout de suite qu'on pourrait considérer une autre forme (1) plus générale du tenseur **T** défini par les composantes

$$T_{ik} = (\varepsilon + p)\lambda_i\lambda_k - p g_{ik}. \tag{I.30}$$

Cette expression caractérise le cas d'une matière à l'intérieur de laquelle agit une pression isotrope p, outre, bien entendu, les efforts inertiaux qui interviennent aussi dans la matière parfaite.

Mais, pour notre but, comme nous le verrons dans la suite, nous pourrons nous borner au cas limite d'une matière parfaite (pour laquelle est donc valable la forme canonique précédente du tenseur **T**) parce que les termes en p sont, dans notre cas, d'un ordre de grandeur négligeable vis-à-vis du tenseur réduit (I.29).

Nous allons maintenant déduire les conséquences de cette hypothèse et de la structure des équations d'Einstein.

3. Les principes de conservation. — Le tenseur dont les composantes covariantes sont les premiers membres des équations d'Einstein a, comme il est bien connu, sa divergence nulle

$$\operatorname{div}\left(\mathbf{G} - \frac{1}{2}G\mathbf{g}\right) = 0, \tag{I.31}$$

en désignant par **g** et **G** les tenseurs dont les composantes covariantes sont g_{ik} et G_{ik}.

Cette propriété entraîne l'équation tensorielle que l'on peut à juste titre appeler l'équation fondamentale de la Dynamique relativiste d'un milieu continu

$$\operatorname{div}\mathbf{T} = 0, \tag{I.32}$$

d'après laquelle la divergence du tenseur énergétique est nulle.

Cette équation tensorielle remplace quatre équations qui expriment sous une forme condensée les principes classiques de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement : on en déduit une conséquence remarquable concernant les lignes de flux, comme nous allons le voir en nous aidant des tout premiers principes du calcul différentiel absolu.

---

(1) *Cf.* J. L. Synge, *Relativistic hydrodynamics* (*Proc. London math. Soc.*, série 2, vol. 43, 1937).

En effet, on peut d'abord écrire l'équation (I.32) sous la forme

$$\sum_{k}^{3}{}_{0} T^{|k}_{ik} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

ou bien

$$\text{(I.32')} \qquad \sum_{kl}^{3}{}_{0} g^{kl} T_{ik|l} = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

où T^{k}_{ik}, $T_{ik|l}$ désignent respectivement les dérivées contrevariante et covariante du tenseur **T**.

En y substituant l'expression (I.29) de T_{ik}, on a

$$\lambda_i \sum_{kl}^{3}{}_{0} g^{kl} \lambda_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^l} + \varepsilon \lambda_i \sum_{k}^{3}{}_{0} \lambda^{|k}_{k} + \varepsilon \sum_{l}^{3}{}_{0} \lambda_{i|l} \lambda^l = 0,$$

ou encore

$$\lambda_i \left(\sum_{k}^{3}{}_{0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^k} \lambda^k + \sum_{k}^{3}{}_{0} \lambda^{|k}_{k} \right) + \varepsilon \sum_{l}^{3}{}_{0} \lambda_{i|l} \lambda^l = 0,$$

et enfin, en posant $p_i = \sum_{l}^{3}{}_{0} \lambda_{i|l} \lambda^l$,

$$\text{(I.33)} \qquad \lambda_i \operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{\lambda}) + \varepsilon p_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3),$$

où les p_i sont les composantes covariantes de la courbure géodésique **p** des lignes horaires.

Ce vecteur **p**, comme il est bien connu et comme il résulte d'ailleurs de l'expression formelle de ses composantes covariantes p_i, n'est que la dérivée vectorielle le long de la ligne horaire de son vecteur tangentiel $\boldsymbol{\lambda}$: il est normal à la ligne et a pour longueur sa courbure scalaire [1].

Les équations ci-dessus expriment que, partout où il y a matière, les lignes horaires sont géodésiques.

En effet, le vecteur **p** est normal à $\boldsymbol{\lambda}$ en tout cas, donc en multipliant par λ^i et additionnant, on obtient de (I.33)

$$\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{\lambda}) = 0,$$

---

(1) T. LEVI-CIVITA, *Absolute differential calculus*, p. 135 et 139-140; Th. de DONDER, *Théorie des champs gravifiques* (*Mém. Sc. math.*, fasc. 14, 1926, p. 12-16).

qui est l'équation de continuité pour notre flux gravitationnel. Alors, les équations (I.33) deviennent

$$\varepsilon p_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{I.26'}$$

d'où l'on tire, pour $\varepsilon \neq 0$, que toutes les composantes du vecteur $\mathbf{p}$ s'annulent à la fois, c'est-à-dire la propriété géodésique des lignes horaires qui peut être exprimée aussi bien par les équations contrevariantes

$$p_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3). \tag{I.26}$$

Dans l'espace vide, on a $\varepsilon = 0$, les lignes horaires n'ont plus de signification et les dernières équations sont satisfaites identiquement.

4. Retour au principe géodésique pour chaque élément du milieu. — Les principes de conservation et la forme canonique du tenseur $\mathbf{T}$ comportent donc dans l'interprétation d'un flux dans l'espace-temps les conséquences suivantes :

a. les lignes horaires sont géodésiques ou, plus précisément, la congruence des lignes horaires est géodésique;

b. le long de ces lignes, il y a un flux de matière parfaite qui se conserve.

Il convient de remarquer que la première conclusion dépend de la forme canonique (I.29) ou (I.29') du tenseur $\mathbf{T}$.

Ces postulats particuliers qui sont assez expressifs et fournissent, pour ainsi dire, une théorie provisoire de cette catégorie de phénomènes détachés des autres, se présentent, comme on le voit, sous leur pleine lumière lorsqu'on les rattache à la théorie générale de la Relativité.

On doit alors établir ou, si l'on veut, rétablir la pleine solidarité entre tous les phénomènes physiques dont il s'agit, réduisant toutefois au minimum possible la catégorie des phénomènes envisagés et reliant les paramètres mathématiques qui les définissent, par un nombre d'équations assez grand pour les déterminer d'après un schéma théorique, fourni par la théorie de la Relativité générale.

CHAPITRE II.

NATURE ANALYTIQUE DES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT GRAVITATIONNEL D'UN MILIEU CONTINU DÉSAGRÉGÉ.

1. — Fonctions inconnues et équations.

1. Prémisses. — Il s'agit désormais de développer d'une manière simple le programme des lignes ci-dessus du dernier paragraphe, lorsqu'on se borne à envisager de la matière parfaite en mouvement dans ce qu'on dirait en Mécanique newtonienne un champ (non préalablement donné), mais entretenu par le mouvement de la matière elle-même et, bien entendu, l'entretenant à son tour.

On a de la sorte un problème réduit de Relativité générale, où, à l'instar de ce qu'on fait bien plus simplement en Mécanique céleste, on néglige un tas de circonstances réelles, en se bornant à établir les bases théoriques de ce qu'on considère les éléments essentiels du phénomène.

Telles sont, du point de vue mathématique, la métrique de l'espace-temps et une congruence de lignes horaires.

Les quantités servant à les déterminer sont :

a. les dix coefficients g_{ik} du ds^2;

b. les quatre paramètres λ^i de la congruence, liés aux g par une équation quadratique, ou les moments λ_i (ou une combinaison quelconque de ces quantités);

c. la densité ε de l'entité physique à laquelle se rapporte le flux.

Au total, quatorze inconnues.

Naturellement il y a (en surplus de la relation en termes finis susdite) quatorze équations aux dérivées partielles fondamentales pour définir ces quatorze quantités.

Ce sont les dix équations d'Einstein

$$G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik} = -\varkappa T_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3), \tag{I.27}$$

les équations (de conservation)

$$p^i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{I.26}$$

qui entraînent la propriété géodésique des lignes horaires et qui se réduisent à trois à cause de l'identité

$$\sum_{i}^{3}{}_{0}\, p_i \lambda_i = 0$$

et l'équation

(I.19) $$\operatorname{div}(\varepsilon \boldsymbol{\lambda}) = 0$$

de conservation.

L'équation en termes finis, indiquée au début, exprime, peut-on dire, que le vecteur $\boldsymbol{\lambda}$ est unitaire et s'écrit

(II.1) $$\sum_{ik}^{3}{}_{0}\, g_{ik} \lambda^i \lambda^k = 1.$$

On peut donner une forme légèrement différente aux équations d'Einstein en introduisant les quantités

(II.2) $$\tau_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik}$$

où

(II.3) $$T = \sum_{ik}^{3}{}_{0}\, g^{ik} T_{ik}$$

est l'invariant linéaire du tenseur $\mathbf{T}$.

En multipliant les équations (II.27) par g^{ik} et saturant les indices i, k, on a

(II.4) $$G = \varkappa T$$

et par conséquent

(II.5) $$G_{ik} = -\varkappa \tau_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

où, dans notre cas,

(II.6) $$\tau_{ik} = \varepsilon \left(\lambda_i \lambda_k - \frac{1}{2} g_{ik} \right)$$

parce qu'on a

$$T = \sum_{ik}^{3}{}_{0}\, g^{ik} \varepsilon \lambda_i \lambda_k = \varepsilon.$$

2. Systèmes normaux d'équations aux dérivées partielles. Indications bibliographiques. — Nous fixons maintenant notre attention sur les équations d'Einstein où, comme nous l'avons déjà remarqué, les fonctions inconnues g_{ik} figurent explicitement et par les combinaisons G_{ik} de leurs dérivées premières et secondes. Les G_{ik} sont linéaires par rapport à ces dernières : néanmoins elles ne sont pas linéaires.

Peut-on affirmer l'existence de solutions de ces équations avec un choix convenable des autres fonctions inconnues du problème ?

Pour étudier la question, nous allons rappeler [1] quelques notions générales concernant les systèmes d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\sum_{1}^{m}{}_{\nu}\sum_{0}^{n}{}_{ik}\,\mathcal{F}_{\mu\nu}^{ik}\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial x^i\,\partial x^k}+\Phi_\mu=0 \qquad (\mu=1,2,\ldots,m), \tag{II.6}$$

où les $x^i(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ jouent le rôle de variables indépendantes, les $\varphi_\nu(\nu=1, 2, \ldots, m)$ de fonctions inconnues; les coefficients $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{ik}$ et les fonctions Φ_μ dépendent des x, des φ et de leurs dérivées premières.

En mettant en évidence les dérivées secondes par rapport à une seule des variables indépendantes, soit x^0 et en omettant tout le reste, on peut se borner à écrire

$$\sum_{1}^{m}{}_{\nu}\,\mathcal{F}_{\mu\nu}^{00}\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial x^{0^2}}+\ldots=0 \qquad (\mu=1,2,\ldots,m); \tag{II.6'}$$

les équations étant résolubles par rapport à $\frac{\partial^2\varphi_\nu}{\partial x^{0^2}}$, si le déterminant Ω des $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{00}$ est différent de zéro. Dans ce cas, on dit que le système est *normal relativement à* x^0.

Si alors on suppose que tout soit analytique, on peut appliquer le théorème de Cauchy-Kowalewski et il s'ensuit localement (dans le sens bien connu) la détermination univoque des fonctions φ au

---

[1] *Cf.* T. Levi-Civita, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, Bologna, Zanichelli, 1931; trad. fr. di Brelot, Paris, Alcan, 1932; J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*, etc. Paris, Hermann, 1903.

voisinage d'une valeur particulière de la variable x^0 ou, en langage géométrique, au voisinage d'un plan

$$x^0 = \overline{x}^0$$

qu'on appelle *surface portant* les données.

On voit aisément dans quelles circonstances se conserve le caractère normal des équations lorsqu'on fait un changement de variables, de sorte que la variété portante au lieu que le plan x^0 égale à une constante donnée soit une surface quelconque à n dimensions

$$z(x^0, x^1, \ldots, x^n) = \text{const.}$$

En effet, si l'on pose

$$p_i = \frac{\partial z}{\partial x^i} \tag{II.7}$$

et

$$\omega_{\mu\nu} = \sum_{ik}^{n} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{ik} p_i p_k, \tag{II.8}$$

le système est normal relativement à z pourvu que le déterminant

$$\Omega = \| \omega_{\mu\nu} \| \tag{II.9}$$

ne soit pas identiquement nul.

3. Application de la théorie générale au cas actuel. Constatation de non-normalité nécessairement due à l'invariance générale du système. — Or on peut démontrer dans notre cas qu'à cause de l'identité tensorielle

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \tag{II.10}$$

où

$$\mathbf{E} = \mathbf{G} - \frac{1}{2} \mathbf{G} \mathbf{g} \tag{II.11}$$

est le tenseur gravitationnel, le système d'Einstein n'est pas normal par rapport au temps x^0, même dans le cas le plus simple où les fonctions T_{ik} sont complètement assignées en fonction des variables x : *a fortiori* donc dans le cas qui nous intéresse.

Pour la démonstration, il suffit de considérer dans l'expression des composantes E_{ik} du tenseur $\mathbf{E}$, l'ensemble des termes linéaires par rapport aux dérivées secondes des g_{ik} qui, d'après un calcul

que nous omettons ici (pour le développer toutefois au Chapitre suivant), est

$$(\text{II}.12)\quad E_{ik}=E_{ki}=\frac{1}{2}\sum_{jh}g^{jh}\left(\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^i\,\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\,\partial x^h}-\frac{\partial^2 g_{ih}}{\partial x^j\,\partial x^k}+\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\,\partial x^h}\right)$$
$$-\frac{1}{2}g_{ik}\sum_{ljhr}g^{lr}g^{jh}\left(\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^l\,\partial x^r}-\frac{\partial^2 g_{jr}}{\partial x^l\,\partial x^h}\right)+\ldots.$$

Lorsqu'on fait un changement de variables remplaçant x^0 par une combinaison

$$z(x^0,\, x^1,\, x^2,\, x^3)$$

les expressions des E_{ik} deviennent

$$(\text{II}.12')\quad E'_{ik}=E'_{ki}=H\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial z^2}+(p_i p_k-H g_{ik})\chi-(p_i\gamma_k+p_k\gamma_i)+g_{ik}\gamma,$$

ayant posé

$$H=\frac{1}{2}\sum_{ik}^{3}{}_{0}\, g^{ik}p_i p_k,$$

$$\chi=\frac{1}{2}\sum_{jh}^{3}{}_{0}\, g^{jh}\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial z^2},$$

$$\gamma_k=\frac{1}{2}\sum_{j}^{3}{}_{0}\, p^j\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial z^2},$$

$$\gamma=\frac{1}{2}\sum_{k}^{3}{}_{0}\, p^k\gamma_k.$$

Or, l'identité tensorielle (II.10) se traduit dans les quatre identités

$$(\text{II}.10')\qquad \sum_{k}^{3}{}_{0}\, E_{ik}^{\,k}=0,$$

où le symbole de dérivation contrevariante est un opérateur dont la partie différentielle se réduit à

$$\sum_{l}^{3}{}_{0}\, g^{kl}\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Si donc on envisage notamment dans les dérivées secondes par rap-

port à z, la partie des E_{ik} qui en dépend est E'_{ik} et l'opérateur se réduit à

$$\sum_{l}^{3}{}_{0} g^{kl} p_l \frac{\partial}{\partial z} = p^k \frac{\partial}{\partial z}.$$

Alors les identités (II.10′) deviennent

$$\text{(II.10″)} \qquad \sum_{0}^{3} p^k E''_{ik} + \ldots = 0,$$

où seulement les termes en évidence contiennent les dérivées troisièmes des g, les expressions E''_{ik} étant obtenues de E'_{ik} en y remplaçant les dérivées secondes des g (par rapport à z) par les dérivées troisièmes.

Dans les (II.10″) les coefficients des dérivées troisièmes susdites s'annulent parce qu'il en est ainsi pour les coefficients des dérivées secondes dans les expressions

$$\sum_{0}^{3}{}_{k} p^k E'_{ik}.$$

On en conclut que

$$\text{(II.13)} \qquad \sum_{0}^{3}{}_{h} p^k E'_{ik} = 0,$$

ce qui démontre que le système envisagé n'est pas normal, c'est-à-dire n'est pas résoluble par rapport aux dérivées secondes $\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial z^2}$ de toutes les g en z.

D'une façon plus précise, on pourrait démontrer que le déterminant des E'_{ik} par rapport au $\frac{\partial^2 g_{jh}}{\partial x^2}$ admet la caractéristique (algébrique) $10 - 4 = 6$ au plus.

2. — Coordonnées isométriques. Réduction à la forme normale.

1. Cas particulier d'Einstein. Artifice analytique de M. De Donder et interprétation géométrique de M. Lanczós. — A la circonstance négative démontrée tout à l'heure, il convient d'associer l'essentielle

propriété des équations d'être invariantes vis-à-vis d'un changement arbitraire des variables x ou, si l'on veut, d'être valables quel que soit le choix des coordonnées de l'espace-temps.

D'après cette remarque, il y a lieu de se demander si l'on ne pourrait pas introduire des variables x telles que le système devienne normal.

Si de telles coordonnées existent, on pourra conclure l'existence de solutions.

Einstein (¹) le premier, en 1918, a intégré ses équations (pour les métriques infiniment voisines à la Relativité restreinte) moyennant un système particulier de coordonnées assujetti à vérifier quatre équations supplémentaires, dont la signification n'était pas évidente.

M. de Donder (²) a repris la question en précisant les coordonnées particulières qui permettent d'aborder le problème de l'intégration, mais en se posant au point de vue strictement analytique. Un peu plus tard, M. Lanczós (³) a retrouvé les coordonnées de M. de Donder dans une forme légèrement différente et en a donné une interprétation géométrique remarquable.

Voici le procédé de MM. de Donder-Lanczós.

Nous rappelons d'abord l'expression explicite des symboles de Christoffel de première et seconde espèce

$$\begin{bmatrix} i\ h \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ih}}{\partial x^j}\right),$$

$$\Gamma^l_{ik} = \sum_h^{0\ldots 3} g^{hl} \begin{bmatrix} i\ k \\ h \end{bmatrix}$$

et de la divergence $\square\Phi$ du tenseur simple, dont les composantes covariantes sont les dérivées premières de la fonction Φ

$$\text{(II.14)}\qquad \square\Phi = \sum_{ik}^{0\ldots 3} g^{ik}\Phi_{i|k} = \sum_{ik}^{0\ldots 3} g^{ik}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i\,\partial x^k} - \sum_l^{0\ldots 3}\Gamma^l_{ik}\frac{\partial\Phi}{\partial x^l}\right).$$

(¹) EINSTEIN, *Sitzungsb*, Berlin, 1916, p. 688-696; *ibid.*, 1918, p. 155-167.

(²) DE DONDER, *La gravifique einsteinienne et la Théorie des champs gravifiques* (*Mém. Sc. math.*, fasc. 14, 1926, Gauthier-Villars, Paris).

(³) K. LANCZÓS, *Ein vereinfachendes Koordinatensystem für die Einsteinschen Gravitationsgleichungen* (*Phys. Zeits.*, 1922); *voir* aussi une Note de M. A. FINZI, *Sulla riduzione a forma normale delle equazioni gravitazionali di Einstein* (*Rend. Lincei*, 1938, p. 324-330).

Si la fonction Φ se réduit à une des variables indépendantes x^j, on a

$$(\text{II.15}) \qquad \square x^j = -\sum_{ik}^{3}{}_{0}\, g^{ik}\Gamma^j_{ik}.$$

C'est le point de départ de M. Lanczós.

Il convient d'introduire aussi les combinaisons linéaires des $\square x^j$, envisagées par M. de Donder

$$(\text{II.16}) \qquad Z_i = \sum_{j}^{3}{}_{0}\, g_{ij}\square x^j,$$

c'est-à-dire

$$(\text{II.16}') \qquad Z_i = -\sum_{j}^{3}{}_{0}\, g_{ij}\sum_{lk}^{3}{}_{0}\, g^{lk}\Gamma^j_{lk} = -\sum_{lk}^{3}{}_{0}\, g^{lk}\begin{bmatrix} l\ k \\ i \end{bmatrix}.$$

Pour donner à Z_i une forme plus avantageuse pour notre but, on remarque que

$$(\text{II.15}') \qquad \square x^j = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_{h}^{3}{}_{0}\, \frac{\partial}{\partial x^h}\left(\sqrt{-g}\, g^{hj}\right)$$
$$= \sum_{h}^{3}{}_{0}\, \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^h} + \sum_{h}^{3}{}_{0}\, g^{hj}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x^h}.$$

Donc

$$Z_i = \sum_{hj}^{3}{}_{0}\, g_{ij}\frac{\partial g^{hj}}{\partial x^h} + \sum_{hj}^{3}{}_{0}\, \frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x^h}\, g_{ij}g^{hj}.$$

Or on a

$$\sum_{j}^{3}{}_{0}\, g_{ij}g^{hj} = \delta_{hj} = \begin{cases} 0 & (h \neq j), \\ 1 & (h = j); \end{cases}$$

$$\sum_{j}^{3}{}_{0}\, g_{ij}\frac{\partial g^{hj}}{\partial x^h} = -\sum_{j}^{3}{}_{0}\, g^{hj}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}.$$

et enfin

$$(\text{II.17}) \qquad Z_i = \frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x^i} + \sum_{hj}^{3}{}_{0}\, g_{ij}\frac{\partial g^{hj}}{\partial x^h} = \frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x^i} - \sum_{hj}^{3}{}_{0}\, g^{hj}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h}.$$

En tenant compte de l'identité

$$d\log\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sum_{ik}^{3}{}_{0}\, g^{ik}\,dg_{ik}$$

qui découle après coup de la règle de différentiation du déterminant de la forme ds^2, on a

$$(II.18) \qquad \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^i} = \frac{1}{2} \sum_{0}^{3}{}_{hj} g^{hj} \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i}.$$

Formons maintenant les expressions

$$(II.19) \qquad \mathcal{L}_{ik} = \frac{\partial Z_i}{\partial x^k} + \frac{\partial Z_k}{\partial x^i}.$$

On a

$$\frac{\partial Z_i}{\partial x^k} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^i \, \partial x^k} - \sum_{0}^{3}{}_{hj} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(g^{hj} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right),$$

donc

$$(II.20) \qquad \mathcal{L}_{ik} = 2 \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^i \, \partial x^k} - \sum_{0}^{3}{}_{hj} \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^h \, \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^h \, \partial x^i} \right) g^{hj} + \ldots$$

en mettant en évidence les dérivées secondes des g qui seules nous intéressent.

Nous nous proposons maintenant de calculer les différences

$$(II.21) \qquad \overline{G}_{ik} = G_{ik} - \frac{1}{2} \mathcal{L}_{ik}$$

ou plus particulièrement l'ensemble des termes de ces différences où figurent les dérivées secondes des g.

On a

$$\sum_{0}^{3}{}_{h} \Gamma_{ih}^{h} = \sum_{0}^{0}{}_{hj} g^{hj} \begin{bmatrix} i\,h \\ j \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sum_{0}^{3}{}_{hj} g^{hj} \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i} = \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x^i}$$

en vertu de la formule (II.18) Donc

$$\begin{aligned} \sum_{0}^{3}{}_{h} \left(\frac{\partial \Gamma_{ih}^{h}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^{h}}{\partial x^h} \right) & \\ = \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^i \, \partial x^k} & - \frac{1}{2} \sum_{0}^{3}{}_{hj} \frac{\partial}{\partial x^h} \left\{ g^{hj} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) \right\} \\ = \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^i \, \partial x^k} & + \frac{1}{2} \sum_{0}^{3}{}_{hj} g^{hj} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h \, \partial x^j} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{0}^{3}{}_{hj} g^{hj} \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^h \, \partial x^k} - \frac{1}{2} \sum_{0}^{3}{}_{hj} g^{hj} \frac{\partial^2 g_{kj}}{\partial x^h \, \partial x^i} + \ldots \end{aligned}$$

Par conséquent, il reste

$$\overline{G}_{ik} = \frac{1}{2}\sum_{hj}^{3}{}_{0}\, g^{hj}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h\, \partial x^j} + \ldots. \tag{II.22}$$

D'autre part

$$\square g_{ik} = \sum_{hj}^{3}{}_{0}\, g^{hj}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h\, \partial x^j} - \sum_{l}^{3}{}_{0}\, \Gamma^l_{hj}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right) = \sum_{hj}^{3}{}_{0}\, g^{hj}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h\, \partial x^j} + \ldots.$$

Donc

$$G_{ik} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z_i}{\partial x^k} + \frac{\partial Z_k}{\partial x^i}\right) = \frac{1}{2}\square g_{ik} + \ldots, \tag{II.23}$$

les termes omis ne contenant aucune dérivée seconde.

C'est le résultat important que nous voulions établir, avec M. de Donder : les composantes G_{ik} du tenseur de Ricci-Einstein de courbure ne diffèrent donc des expressions

$$\frac{1}{2}\sum_{hj}^{3}{}_{0}\, g^{hj}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h\, \partial x^j}$$

que par des termes contenant seulement les dérivées premières des fonctions g.

Les conditions de M. de Donder

$$Z_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3) \tag{II.24}$$

sont équivalentes aux conditions de M. Lanczós

$$\square x^i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3), \tag{II.25}$$

mais ces dernières sont susceptibles d'une importante interprétation géométrique.

A cet effet, considérons l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\square \Phi = 0, \tag{II.26}$$

l'opérateur $\square$ étant calculé avec la métrique de l'espace-temps.

Les surfaces intégrales de cette équation sont des variétés analogues aux surfaces isotermes des espaces euclidiens ordinaires, ou, s'il s'agit d'une métrique indéfinie où la coordonnée x^0 joue le rôle

de temps, aux surfaces d'onde de la propagation régie par l'équation

$$(II.27) \qquad \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \Delta_2\Phi = 0,$$

dont le premier membre est l'opérateur $\square$.

Soient quatre familles distinctes de surfaces intégrales $\Phi_i = c_i$ de l'équation (II.26) : on peut les choisir évidemment d'une infinité de manières. Il est bien clair alors qu'on aura

$$\square x^i = 0,$$

lorsqu'on prendra comme nouvelles variables x les Φ.

Ces conditions généralisent le caractère d'harmonicité des coordonnées cartésiennes dans une métrique euclidienne; c'est pourquoi nous appelons *isométriques* les variables x qui y satisfont.

2. Forme équivalente des équations d'Einstein. — Nous pourrons donc conclure qu'il est loisible de substituer aux équations d'Einstein les équations

$$(II.28) \qquad \frac{1}{2}\square g_{ik} + \ldots = -\varkappa\tau_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

à condition d'y adjoindre les quatre équations supplémentaires

$$(II.25) \qquad \square x^i = 0,$$

ou bien

$$(II.24) \qquad Z_i = 0,$$

3. Normalisation du système comprenant à la fois les équations gravitationnelles et le principe géodésique. — En définitive, par l'emploi de coordonnées isométriques, nous avons traduit dans les numéros précédents notre problème par le système suivant en coordonnées isométriques

$$(I) \qquad \frac{1}{2}\square g_{ik} + \ldots = -\varkappa\varepsilon\left(\lambda_i\lambda_k - \frac{1}{2}g_{ik}\right) \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

$$(II) \qquad p_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 2),$$

$$(III) \qquad \mathrm{div}(\varepsilon\boldsymbol{\lambda}) = 0,$$

$$(IV) \qquad Q = \sum_{ik}^{3}{}_{0}\, g^{ik}\lambda_i\lambda_k = 1.$$

Il est aisé de voir que ce système est *normal* et que, par conséquent, on peut lui appliquer le théorème d'existence de Cauchy-Kowaleswki.

Le système caractérise l'évolution des fonctions inconnues g, λ, ε lorsqu'on donne sur une surface non caractéristique (¹) les valeurs des fonctions mêmes et de leurs dérivées premières ou en donnant à l'instant initial $x^0 = 0$ les fonctions inconnues en fonctions arbitraires des variables x^1, x^2, x^3.

On doit remarquer toutefois que ces fonctions arbitraires doivent satisfaire à la condition

$$\text{(II.1)} \qquad \sum_{ik}^{3}{}_{0}\, g^{ik}\lambda_i\lambda_k = 1$$

dans tout l'espace.

C'est ce qui résultera sans peine de l'identité

$$\text{(II.29)} \qquad \frac{dQ}{ds} = 0$$

que nous allons démontrer.

En vérité, nous devons vérifier que la dérivée $\frac{dQ}{ds}$ est nulle, en tenant compte des équations des géodésiques.

On a

$$\frac{dQ}{ds} = \sum_{ik}^{3}{}_{0}\, \lambda^k \left(\frac{dg_{ik}}{ds}\lambda^i + 2g_{ik}\frac{d\lambda_i}{ds} \right),$$

ou, en vertu des équations (I.23)

$$\frac{dQ}{ds} = \sum_{ik}^{3}{}_{0}\, \lambda^i\lambda^k \frac{dg_{ik}}{ds} - \sum_{ikjh}^{3}{}_{0}\, 2g_{ik}\Gamma^i_{jh}\lambda^h\lambda^k\lambda^j.$$

Mais on a

$$\sum_{0}^{3} g_{ik}\Gamma^i_{jh} = \begin{bmatrix} j\ h \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^k} \right),$$

donc aussi le second sommatoire de l'expression qui donne $\frac{dQ}{ds}$ devient

$$\sum_{hkj}^{3}{}_{0}\, \lambda^h\lambda^k\lambda^j \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^h} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^k} \right) = \sum_{hkj}^{3}{}_{0}\, \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j}\lambda^h\lambda^k\lambda^j$$

(¹) *Cf.* T. LEVI-CIVITA, *loc. cit.*, p. 28.

et l'on a

$$\frac{dQ}{ds} = \sum_{0}^{3}{}_{ik} \frac{dg_{ik}}{ds} \lambda^i \lambda^k - \sum_{0}^{3}{}_{hkj} \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^j} \lambda^h \lambda^k \lambda^j = 0,$$

puisque

$$\frac{dg_{ik}}{ds} = \sum_{0}^{3}{}_{j} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \lambda^j.$$

Dès que $\frac{dQ}{ds}$ est nulle, Q reste constante tout le long des lignes horaires. Il suffit partant de choisir $Q = 1$ sur la surface $x^0 = \overline{x}_0$ portant les données pour qu'on ait effectivement $Q = 1$ dans tout l'espace. C. Q. F. D.

Nous parvenons donc à cette conclusion fondamentale que, *en coordonnées isométriques, l'assignation des valeurs initiales des inconnues, sous la condition précisée tout à l'heure, détermine d'une manière unique la métrique et le flux ayant pour lignes de courant des géodésiques dans l'espace-temps.*

CHAPITRE III.

CRITÈRES D'APPROXIMATION ET ÉQUATIONS RÉDUITES.

1. Ordres de grandeur et emploi autant que possible de quantités sans dimensions.

1. Appréciations numériques. — Ayant en vue le problème des *n* corps, il convient de suivre les indications de Droste-de Sitter, mais sans effacer *a priori* ce qui provient, pour chacun des corps, de ce corps lui-même. Nous tâcherons de développer les passages logiques, évitant en même temps les complications inessentielles à l'aide de quelques hypothèses qualitatives complémentaires, à côté de l'approximation principale, provenant de la petitesse des vitesses des corps célestes vis-à-vis de celle de la lumière, adoptée par Einstein et par tous ses continuateurs.

Il importe évidemment de bien préciser les circonstances préalables d'ordre de grandeur sous lesquelles nous allons aborder, simplifier et résoudre le problème.

En premier lieu, comme on l'a déjà dit dans la Préface, on se contente d'arriver, dans les équations différentielles du mouvement, à la seconde approximation.

Rappelons ce qu'on entend par là.

Dans les problèmes qui nous intéressent, l'ordre de grandeur des quantités mécaniques, notamment de l'énergie cinétique et potentielle, est celui de notre système planétaire.

Pour les mouvements de ce système, v^2 (carré de la vitesse du Soleil, d'une planète ou satellite quelconque, c'est-à-dire double de l'énergie cinétique réduite à l'unité de masse) est très petit vis-à-vis du carré c^2 de la vitesse de la lumière et l'ordre de grandeur du rapport

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2}$$

est 10^{-8} dans le cas de la Terre et pas trop différent sinon plus petit pour les autres corps du système solaire.

Il en est de même pour la valeur du potentiel newtonien du système, soit à l'extérieur, soit même à l'intérieur du Soleil, des planètes, ou des satellites. Il convient peut-être d'illustrer ce point par des appréciations qui relèvent de la théorie du potentiel.

Soient S le champ occupé par tous les corps C_h ($h = 0, 1, \ldots, n-1$) que l'on considère et μ la fonction représentant la densité locale.

Nous aurons fréquemment dans la suite à considérer l'opérateur B qui consiste à former l'intégrale

$$\text{(III.1)} \qquad \gamma = \mathrm{B}\mu = \int_{\mathrm{S}} \frac{f\mu}{c^2 r}\,ds = \sum_{1}^{n}{}_h \int_{C_h} \frac{f\mu}{c^2 r}\,dC_h.$$

C'est une opération basilaire (c'est pourquoi nous l'indiquons par B) : elle fait correspondre à la densité μ une grandeur γ de dimensions zéro (nombre pur).

Si μ_h est le maximum de μ dans C_h, on a

$$\text{(III.2)} \qquad \mathrm{B}\mu \leq \sum_{1}^{n}{}_h \frac{f\mu_h}{c^2} \int_{C_h} \frac{dC_h}{r}.$$

Rappelons maintenant l'expression du potentiel d'une sphère homogène de rayon R, dont la masse soit M.

$$\text{(III.3)} \qquad \mathrm{U} = \begin{cases} \dfrac{f\mathrm{M}}{r} & \text{à l'extérieur,} \\[2ex] 2\pi f\mu \mathrm{R}^2 - \dfrac{2}{3}\pi f\mu r^2 \leq \dfrac{3}{2} f \dfrac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}} & \text{à l'intérieur.} \end{cases}$$

Donc partout

$$U \leq \frac{3}{2} f \frac{M}{R} \tag{III.3'}$$

et encore

$$B\mu \leq \frac{3}{2} \sum_{1}^{n} {}_h \frac{f M_h}{c^2 R_h} = \frac{3}{2} \sum_{1}^{n} {}_h \frac{f M_\odot}{c^2 R_\odot} \frac{M_h}{M_\odot} : \frac{R_h}{R_\odot}, \tag{III.4}$$

où $R_\odot$, $M_\odot$ désignent le rayon et la masse du Soleil.

On pourrait écrire aussi

$$B\mu \leq \frac{2f}{c^2} \sum_{1}^{n} {}_h \mu_h R_h^2 = \frac{2f}{c^2} \sum_{1}^{n} {}_h \frac{\mu_h}{\mu_\odot} \left(\frac{R_h}{R_\odot}\right)^2 : \frac{1}{\mu_\odot R_\odot^2}.$$

Tenant compte de ce que (pour notre système planétaire) on peut admettre les μ_h d'un ordre de grandeur au plus comparable à $\mu_\odot$ et les R_h comparables à $R_\odot$, il en résulte que γ est de l'ordre de 10^{-6}.

2. Hypothèses qualitatives et simplifications qui en découlent. Définition d'ordre d'approximation. — Nous appellerons du premier ordre les termes qui sont des nombres purs ayant justement un tel ordre de grandeur qui est en même temps celui d'un

$$\beta^2 = \frac{v^2}{c^2} \tag{III.5}$$

ou d'un

$$\gamma. \tag{III.6}$$

Une première approximation consiste à négliger les termes d'ordre supérieur.

D'après cela, nous négligerons systématiquement dans une relation quelconque, les termes comme β^3 ou $\beta\gamma$, etc., devant l'unité, avec la convention que si dans une formule les termes prépondérants sont d'un certain ordre minimum ν, il faudra commencer à retenir avec eux seulement tout ce qui ne dépasse pas l'ordre $\nu + 1$.

D'autre part, dans le but de simplifier autant que possible, il est naturellement avantageux de se rapporter à des coordonnées isométriques (*cf.* Chap. II, § 2) telles que l'élément ds^2 reste très proche du ds_0^2 de la Relativité restreinte qui a, comme il est bien connu, la forme pseudo-euclidienne :

$$ds_0^2 = dx^{0^2} - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2}), \tag{III.7}$$

où

(III.8) $$x^0 = ct$$

n'est que le temps dit *römérien* par M. Levi-Civita (¹), et x^1, x^2, x^3 sont des coordonnées cartésiennes orthogonales.

Nous admettons donc que la métrique de l'espace-temps comporte des coordonnées x^i très proches à l'espèce pseudo-euclidienne, dans ce sens que les coefficients g_{ik} diffèrent des valeurs

(III.9) $$g^0_{ik} = \begin{cases} \pm 1 & (i = k), \\ 0 & (i \neq k), \end{cases}$$

correspondantes à ds_0^2 par des quantités $-2\gamma_{ik}$ du premier ordre au moins, les γ_{0i} étant même d'ordre non inférieur (²) à $\frac{3}{2}$.

Pour tenir compte, dans les équations du mouvement des termes immédiatement supérieurs à l'approximation newtonienne, il suffit, comme Einstein l'a fait remarquer le premier, de calculer la partie prépondérante d'ordre minimum de tous les γ_{ik}, excepté toutefois γ_{00} pour lequel il faut expliciter non seulement le premier ordre, mais aussi le second (³).

A l'exemple de M. Eisenhart (⁴) nous utiliserons le symbole

(III.10) $$e_i = \begin{cases} 1 & (i = 0), \\ -1 & (i \neq 0), \end{cases}$$

qui permet d'écrire sous une forme condensée

(III.7′) $$ds_0^2 = \sum_0^3 {}_i\, e_i\, dx^{i\,2}.$$

Nous pourrons retenir donc

(III.11) $$g_{ik} = \delta_{ik}\, e_i - 2\gamma_{ik},$$

(¹) Cf. *Absolute differential Calculus*, p. 307.

(²) En effet, si γ_{0i} était du premier ordre, telle devrait être la différence des vitesses de propagation de la lumière suivant deux directions issues d'un même point. Les expériences optiques n'ont pas révélé cette circonstance, ce qui exclut l'hypothèse (*cf.* LEVI-CIVITA, *loc. cit.*, p. 369).

(³) *Cf.* T. LEVI-CIVITA, *loc. cit.*, p. 370.

(⁴) *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, 1926, Chap. II.

en regardant γ_{ik} du premier ordre (au moins) et γ_{0i} $(i > 0)$ au moins d'ordre $\frac{3}{2}$.

3. Autres sources de réductions. — Nous allons introduire l'approximation ci-dessus dans les équations du système (I).

Remarquons d'abord que dans l'approximation d'ordre zéro, on a, pour les éléments réciproques $(g^{ik})^0$

$$(g^{ik})^0) = g^0_{ik} = \delta_{ik} e_i, \tag{III.12}$$

ce qui se prouve tout bonnement en vérifiant les identités

$$\sum_0^3{}_j (g^{ij})^0 g^0_{jk} = \delta_{ik}$$

par substitution directe des valeurs indiquées.

En effet, on a identiquement

$$\sum_0^3{}_j \delta_{jk} e_k \delta_{ij} e_i = e_i e_k \sum_0^3{}_j \delta_{jk} \delta_{ji} = \delta_{ik} e_i e_k = \delta_{ik} \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3).$$

Pour ce qui concerne les quantités

$$\beta_i = \frac{dx^i}{dx_0} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{III.13}$$

remarquons qu'elles sont nulles en première approximation lorsqu'il s'agit de mouvements très lents.

La même remarque s'applique aux fonctions $\lambda^i (i = 1, 2, 3)$ tandis qu'on a $\lambda^0 = 1$.

Pour réaliser le passage à la même approximation dans les équations du problème, il faudra encore tenir compte de ce que nos inconnues dépendent de x^0 beaucoup moins sensiblement que des variables x^i $(i > 0)$, dans ce sens que, si l'on admet (comme il arrive justement dans notre cas) qu'une quantité f dépend du temps seulement à travers le mouvement de quelques points P_ν dont elle est fonction, on a nécessairement

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x^0}\right| \leq \sum |\beta_{i\nu}| \left|\frac{\partial f}{\partial x^i}\right| \qquad (i > 0),$$

le symbole $\sum$ se rapportant évidemment aux différentes coordonnées d'espace de chacun de ces points.

Si la vitesse de ces points est de l'ordre des β, les dérivées temporelles sont aussi de cet ordre par rapport aux dérivées locales.

Pour ce qui concerne la densité μ, sa distribution initiale μ^0 (d'ailleurs quelconque) en constitue l'approximation d'ordre zéro. Une approximation ultérieure devra naturellement s'exprimer en termes finis par μ^0 et les approximations précédentes des γ et β.

Dans la suite, nous dénoterons par le signe $\textcircled{n}$ un ensemble de termes au moins d'ordre n.

4. **Formules approchées se rapportant au ds^2 et aux moments des lignes horaires.** — Ceci posé, en tenant compte de ce que les $\beta_i (i > 0)$ sont de l'ordre $\frac{1}{2}$, considérons l'intervalle

$$\text{(I.5)} \qquad ds^2 = \sum_{ik}^{3}{}_{0}\, g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

qui peut être écrit sous la forme suivante :

$$\text{(I.5')} \qquad \begin{aligned} ds^2 &= dx^{0^2}\left(g_{00} + 2\sum_{i}^{3}{}_{1}\, g_{0i}\frac{dx^i}{dx^0} + \sum_{ik}^{3}{}_{1}\, g_{ik}\frac{dx^i}{dx^0}\frac{dx^k}{dx^0}\right) \\ &= dx^{0^2}\left(1 - 2\gamma_{00} - \beta^2 + \textcircled{2}\right), \end{aligned}$$

parce que (n° 2 de ce Chapitre), les g_{0i} sont de l'ordre $\frac{3}{2}$ au moins; et pour le calcul de la somme

$$\sum_{ik}^{3}{}_{1}\, g_{ik}\beta_i\beta_k;$$

il suffit de substituer aux g_{ik} les valeurs de l'approximation zéro g_{ik}^0 et, pour les β, les valeurs indiquées à la page 42.

On a donc

$$\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 = 1 - 2\gamma_{00} - \beta^2 + \textcircled{2},$$

d'où l'on déduit justement

$$\text{(III.14)} \qquad \frac{ds}{dx^0} = 1 - \gamma_{00} - \frac{1}{2}\beta^2 + \textcircled{2}.$$

D'autre part, on a

$$(\text{III}.15)\qquad \lambda_i=\sum_0^3{}_j\, g_{ij}\frac{dx^j}{ds}=\sum_0^3{}_j\,\delta_{ij}\, e_i\frac{dx_j}{ds}+ⓘ=e_i\frac{dx^i}{ds}+ⓘ.$$

Pour les calculs successifs, nous aurons besoin d'évaluer le terme du second ordre de γ_{00}, c'est pourquoi nous poserons dans nos formules destinées à ce but

$$(\text{III}.15')\qquad \lambda_0=\sum{}_j\, g_{0j}\lambda^j=g_{00}\frac{dx^0}{ds}+②=(1-2\gamma)\left(1+\gamma+\frac{1}{2}\beta^2\right)+②.$$

5. Formules approchées se rapportant au tenseur énergétique. — On a

$$\tau_{ik}=\varepsilon\left(\lambda_i\lambda_k-\frac{1}{2}g_{ik}\right)=\varepsilon\left(e_i\, e_k\,\lambda^i\lambda^k-\frac{1}{2}\delta_{ik}\, e_i\right)+ⓘ\qquad (i>0,\ k>0).$$

Donc

$$(\text{III}.16)\quad\begin{cases}\tau_{0i}=\varepsilon\, e_i\dfrac{dx^0}{ds}\dfrac{dx^i}{ds}=-\varepsilon\dfrac{dx^i}{dx^0}\left(\dfrac{dx^0}{ds}\right)^2=-\varepsilon\beta_i+ⓘ & (i>0),\\[2mm] \tau_{ik}=\dfrac{1}{2}\delta_{ik}\,\varepsilon+ⓘ\qquad (i>0,\ k>0).\end{cases}$$

Plus précisément

$$(\text{III}.16')\qquad \tau_{ik}=ⓘ\qquad (i\neq k,\ i>0,\ k>0),$$

$$(\text{III}.17)\qquad \tau_{ii}=\frac{1}{2}\varepsilon+ⓘ.$$

Maintenant il faut pousser l'approximation pour se procurer l'expression de τ_{00} jusqu'au premier ordre inclus (en négligeant toutefois les termes d'ordre supérieur au premier).

Pour cela il faut reprendre l'expression générale écrite tout à l'heure

$$(\text{III}.17')\qquad \tau_{00}=\varepsilon\left(\lambda_0^2-\frac{1}{2}g_{00}\right)$$

et y poser l'expression (III.15') de λ_0 et (III.11) de g_{00}.

On trouve

$$(\text{III}.18)\qquad \tau_{00}=\varepsilon\left[(1-4\gamma)(1+2\gamma+\beta^2)-\frac{1}{2}+\gamma\right]=\varepsilon\left(\frac{1}{2}+\beta^2-\gamma\right)+②.$$

6. L'opérateur $\square\Phi$ pour une fonction Φ du premier ordre. — On a

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\sum_{0}^{3}{}_j \frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{-g}\,\Phi^j), \tag{III.19}$$

où

$$\Phi^j = \sum_0^3{}_k g^{jk}\Phi_k = \sum_0^3{}_k \left(\delta_{jk}e_j + \textcircled{1}\right)\Phi_k = \sum_0^3{}_k \delta_{kj}e_j\Phi_k + \textcircled{2} = e_j\Phi_j + \textcircled{2},$$

Donc

$$\square\Phi = \sum_0^3{}_j \frac{\partial}{\partial x^j}(e_j\Phi_j) + \textcircled{2} = \square^0\Phi + \textcircled{2}, \tag{III.20}$$

où

$$\square^0\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial {x^0}^2} - \sum_1^3{}_i \frac{\partial^2\Phi}{\partial {x^i}^2} \tag{III.21}$$

est la divergence de Φ calculée d'après la métrique d'Einstein-Minkowski.

2. Réduction des équations et intégration par des potentiels.

1. Les équations d'Einstein. — Nous avons déjà constaté que la partie des composantes G_{ik} du tenseur de courbure qui contient des dérivées secondes des g se réduit à

$$\overline{G}_{ik} = \frac{1}{2}\sum_0^3{}_{hj} g^{hj}\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^h\,\partial x^j} + \ldots. \tag{II.22}$$

D'autre part l'expression explicite des G_{ik} étant, comme il est bien connu

$$G_{ik} = G_{ik}^{(1)} + G_{ik}^{(2)},$$

où

$$G_{ik}^{(1)} = \sum_0^3{}_h \left(\frac{\partial\Gamma_{ih}^h}{\partial x^k} - \frac{\partial\Gamma_{ik}^h}{\partial x^k}\right),$$

$$G_{ik}^{(2)} = -\sum_0^3{}_{hl}(\Gamma_{ik}^l\Gamma_{hl}^h - \Gamma_{ih}^l\Gamma_{kl}^h),$$

on reconnaît immédiatement que les symboles de Christoffel de seconde espèce, d'après les expressions (III.11) des g_{ik}

$$g_{ik} = \delta_{ik} e_i - 2\gamma_{ik}$$

et la circonstance fondamentale que les γ_{ik} doivent être regardées du premier ordre au moins, sont au moins du premier ordre, de sorte que $G_{ik}^{(2)}$ est une quantité du second ordre.

Remarquons encore que les termes omis de l'expression (II.20) de $\mathcal{L}_{ik}$

$$-\sum_{hj}^{3}{}_{0} \left(\frac{\partial g^{hj}}{\partial x^k} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} + \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^i} \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^h} \right)$$

ne contenant pas de dérivées secondes sont également du second ordre au moins.

D'après cêla, on est assuré que les termes omis dans l'égalité (II.23) sont du second ordre au moins, de sorte qu'on peut écrire

$$G_{ik} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial Z_i}{\partial x^k} + \frac{\partial Z_k}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2} \Box g_{ik} + \textcircled{2}.$$

Alors, en vertu de l'évaluation de l'opérateur $\Box$ envisagé tout à l'heure, les équations d'Einstein, en coordonnées isométriques deviennent, à des termes d'ordre supérieur au premier près, si les indices ne sont pas nuls à la fois,

(III.22) $$-\Box^0 \gamma_{ik} + \varkappa \tau_{ik} = 0.$$

Si l'on remarque que la dérivation par rapport à x^0 augmente de $\frac{1}{2}$ l'ordre de la quantité dont il s'agit, on peut substituer à $-\Box^0$ l'opérateur de Laplace Δ_2^0 (évalué d'après la métrique euclidienne) et les équations deviennent par conséquent, toujours en négligeant ce qui dépasse le premier ordre

(III.23) $$\Delta_2^0 \gamma_{ik} = -\varkappa \tau_{ik} \quad (i, k = 0, 1, 2, 3),$$

où les expressions de τ_{ik} sont données par les formules précédentes.

Soulignons explicitement encore une fois que l'équation correspondant aux indices $i = k = 0$ doit avoir un traitement à part, puisqu'il faut tenir compte aussi des termes du second ordre pour en tirer γ_{00} *jusqu'au second ordre inclus.*

2. Intégration des équations qui définissent les γ_{ik} au second ordre près. — Nous venons de voir qu'on a

(III.16) $$\tau_{0i} = -\varepsilon\beta_i + \textcircled{1} \qquad (i > 0),$$
(III.16') $$\tau_{ik} = \textcircled{1} \qquad (i \neq k,\ i > 0,\ k > 0),$$
(III.17) $$\tau_{ii} = \frac{1}{2}\varepsilon + \textcircled{1} \qquad (i > 0).$$

Les équations à intégrer sont donc

(III.24) $$\Delta_2^0 \gamma_{ik} = -\varkappa\frac{1}{2}\delta_i^k\varepsilon + \textcircled{1},$$

(III.25) $$\Delta_2^0 \gamma_{0i} = -\varkappa\frac{\varepsilon}{2}(-2\beta_i) + \textcircled{1}.$$

Introduisons alors la fonction γ au moyen de l'équation

(III.26) $$\Delta_2^0 \gamma = -\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon = -\frac{1}{2}\varkappa c^2\mu,$$

ou, si l'on veut

(III.26') $$\Delta_2^0 \gamma = -4\pi f\frac{\mu}{c^2},$$

C'est évidemment la célèbre équation de Poisson.

La présence du dénominateur c^2 nous rappelle que γ est le potentiel newtonien adimensionnel de la distribution de matière envisagée.

On en déduit

(III.27) $$\gamma = \frac{f}{c^2}\int_S \frac{\mu\, dS}{r}.$$

La comparaison de l'équation de Poisson avec les précédentes nous démontre la possibilité de poser

(III.28) $$\gamma_{ik} = \delta_{ik}\gamma + \textcircled{2} \qquad (i, k = 1, 2, 3),$$
(III.29) $$\gamma_{0i} = -2\gamma_i + \textcircled{\tfrac{3}{2}} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

où γ_i est le potentiel vecteur adimensionnel, c'est-à-dire

(III.30) $$\gamma_i = \frac{f}{c^2}\int_S \frac{\mu\beta_i}{r} dS.$$

En tout cas, on peut retenir

(III.31) $$\gamma_{ik} = \delta_{ik}\gamma + \textcircled{\tfrac{3}{2}}.$$

3. L'équation qui définit γ_{00} jusqu'à la seconde approximation. — Nous avons besoin de l'expression approchée des éléments g^{ik}, qui est donnée par

(III.32) $$g^{ik} = \delta_{ik} e_i + 2 e_i e_k \gamma_{ik},$$

comme il est aisé de voir à travers la relation de réciprocité.

De plus, on remarque que

$$g = -1 + 2\sum_{i}^{3} {}_{0}\, e_i \gamma_{ii} + \textcircled{2} = -1 + 2(\gamma - 3\gamma) + \textcircled{2}.$$

Donc

(III.33) $$\sqrt{-g} = 1 + 2\gamma + \textcircled{2}$$

et enfin

(III.34) $$\log \sqrt{-g} = 2\gamma + \textcircled{2}.$$

Ceci posé, la première équation d'Einstein est

(III.35) $$G_{00} - \frac{\partial Z_0}{\partial x^0} = -\varkappa \tau_{00}$$

et nous procédons au calcul de G_{00} que nous décomposons comme il suit :

(III.36) $$G_{00} = G_{00}^{(1)} + G_{00}^{(2)},$$

où

(III.37) $$G_{00}^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x^0} \sum_{0}^{3}{}_h \Gamma_{0h}^h - \sum_{0}^{3}{}_h \frac{\partial \Gamma_{00}^h}{\partial x^h},$$

(III.38) $$G_{00}^{(2)} = -\sum_{0}^{3}{}_{hl} (\Gamma_{00}^l \Gamma_{hl}^h - \Gamma_{0h}^l \Gamma_{0l}^h).$$

On a d'autre part

$$\frac{\partial Z_0}{\partial x^0} = \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^{0^2}} - \sum_{0}^{3}{}_{hj} \frac{\partial}{\partial x^0}\left(g^{hj} \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^h}\right).$$

Or

$$\frac{\partial}{\partial x^0} \sum_{0}^{3}{}_h \Gamma_{0h}^h = \frac{\partial^2 \log \sqrt{-g}}{\partial x^{0^2}}.$$

et en tenant compte des formules (III.11), (III.12) et (III.32)

$$\Gamma^h_{00} = \frac{1}{2}\sum_0^3{}_j g^{hj}\left(2\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}\right) = -2\sum_0^3{}_j g^{hj}\frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^0} + \sum_0^3{}_j g^{hj}\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^j}$$

$$= \sum_0^3{}_j g^{hj}\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^j} - 2\sum_0^3{}_j g^{hj}\frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^0},$$

$$\sum_0^3{}_h \frac{\partial \Gamma^h_{00}}{\partial x^h} = \sum_0^3{}_{hj} g^{hj}\frac{\partial^2 \gamma_{00}}{\partial x^h \partial x^j} - 2\sum_0^3{}_{hj} g^{hj}\frac{\partial^2 \gamma_{0j}}{\partial x^0 \partial x^h}$$

$$+ 2\sum_0^3{}_j e_h e_j \frac{\partial \gamma_{hj}}{\partial x_h}\left(\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^j} - 2\frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^0}\right) + (3).$$

On a aussi

$$\frac{\partial Z_0}{\partial x^0} = \frac{\partial^2 \log\sqrt{-g}}{\partial {x^0}^2} + 2\sum_0^3{}_{hj} g^{hj}\frac{\partial^2 \gamma_{0j}}{\partial x^0 \partial x^h} - \sum_0^3{}_{hj}\frac{\partial g^{hj}}{\partial x^0}\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^h}$$

$$= \frac{\partial^2 \log\sqrt{-g}}{\partial {x^0}^2} + 2\sum_0^3{}_{hj} g^{hj}\frac{\partial^2 \gamma_{0j}}{\partial x^0 \partial x^h}.$$

Enfin

$$G^{(1)}_{00} - \frac{\partial Z_0}{\partial x^0} = -\sum_0^3{}_{hj} g^{hj}\frac{\partial^2 \gamma_{00}}{\partial x^h \partial x^j} - 2\sum_0^3{}_j e_h e_j \frac{\partial \gamma_{hj}}{\partial x^h}\left(\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^j} - 2\frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^0}\right) + (3)$$

$$= -\sum_0^3{}_{hj}(\delta_{hj} e_j + 2 e_h e_j \gamma_{hj})\frac{\partial^2(\gamma + Z)}{\partial x^h \partial x^j}$$

$$- 2\sum_0^3{}_j e_h e_j \frac{\partial \gamma_{hj}}{\partial x^h}\left(\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^j} - 2\frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^0}\right),$$

ayant posé

(III.39) $$\gamma_{00} = \gamma + Z,$$

où Z est la partie du second ordre de γ_{00}. En poursuivant les calculs, on trouve

$$G^{(1)}_{00} - \frac{\partial Z_0}{\partial x^0} = -\Box^0\gamma - \Box^0 Z - 2\sum_0^3{}_{hj} e_h e_j \gamma_{hj}\frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^h \partial x^j}$$

$$- 2\sum_0^3{}_j e_h e_j \frac{\partial \gamma_{hj}}{\partial x^h}\left(\frac{\partial \gamma_{00}}{\partial x^j} - 2\frac{\partial \gamma_{0j}}{\partial x^0}\right) + (3)$$

$$= -\Box^0\gamma - \Box^0 Z - 2\sum_0^3{}_j \gamma\frac{\partial^2 \gamma}{\partial {x^j}^2}$$

$$- 2\sum_0^3{}_j e_h e_j \delta_{hj}\frac{\partial \gamma}{\partial x^h}\left(\frac{\partial \gamma}{\partial x^j} - 2\delta_{0j}\frac{\partial \gamma}{\partial x^0}\right) + (3),$$

où l'on a posé

(III.40) $$\gamma_{hj} = \delta_{hj}\gamma + \textcircled{2},$$

en vertu des considérations du numéro précédent.

Le résultat final est

(III.41) $$G^{(1)}_{00} - \frac{\partial Z_0}{\partial x^0} = -\Box^0\gamma - \Box^0 Z - 2\gamma\Delta_2^0\gamma - 2\Delta_1^0\gamma + \textcircled{3}$$
$$= -\Box^0\gamma - \Box^0 Z - \Delta_2^0\gamma^2 + \textcircled{3},$$

où

(III.42) $$\Delta_1^0\gamma = \sum_{1}^{3}{}_i \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}\right)^2$$

est le paramètre différentiel du premier ordre ou opérateur de Beltrami.

Il faut encore calculer $G^{(2)}_{00}$.

On a

$$G^{(2)}_{00} = \sum_{0}^{3}{}_{hj}\left(\Gamma^j_{0h}\Gamma^h_{0j} - \Gamma^j_{00}\Gamma^h_{hj}\right),$$

$$\Gamma^j_{0h} = \sum_{0}^{3}{}_l \delta_{lj} e_j \left[\begin{matrix} 0\ h \\ l \end{matrix}\right] + \ldots + \textcircled{2} = e_j\left(\frac{\partial\gamma_{0h}}{\partial x^j} - \frac{\partial\gamma_{0j}}{\partial x^h}\right) + \textcircled{2},$$

$$\Gamma^h_{0j} = \sum_{0}^{3}{}_l \delta_{lh} e_h \left(\frac{\partial\gamma_{0j}}{\partial x^l} - \frac{\partial\gamma_{0l}}{\partial x^j}\right) + \textcircled{2} = e_h\left(\frac{\partial\gamma_{0j}}{\partial x^h} - \frac{\partial\gamma_{0h}}{\partial x^j}\right) + \textcircled{2},$$

$$\sum_{0}^{3}{}_{hj}\Gamma^j_{0h}\Gamma^h_{0j} = \sum_{0}^{3}{}_{hj} e_h e_j \left(\frac{\partial\gamma_{0h}}{\partial x^j} - \frac{\partial\gamma_{0j}}{\partial x^h}\right)\left(\frac{\partial\gamma_{0j}}{\partial x^h} - \frac{\partial\gamma_{0h}}{\partial x^j}\right) + \textcircled{3}$$
$$= -\sum_{0}^{3}{}_{hj} e_h e_j \left(\frac{\partial\gamma_{0h}}{\partial x^j}\right)^2 - \sum_{0}^{3}{}_{hj} e_h e_j \left(\frac{\partial\gamma_{0j}}{\partial x^h}\right)^2 + \textcircled{3}$$
$$= 2\sum_{1}^{3}{}_j e_j \left(\frac{\partial\gamma}{\partial x^j}\right)^2 + \textcircled{3} = 2\Delta_1^0\gamma + \textcircled{3},$$

$$\sum_{0}^{3}{}_{hj}\Gamma^j_{00}\Gamma^h_{hj} = \sum_{0}^{3}{}_j \Gamma^j_{00}\sum_{0}^{3}{}_h \Gamma^h_{jh} = \sum_{0}^{3}{}_j \Gamma^j_{00}\frac{\partial \log\sqrt{-g}}{\partial x^j} = 2\sum_{0}^{3}{}_j \Gamma^j_{00}\frac{\partial\gamma}{\partial x^j} + \textcircled{3}.$$

Mais

$$\Gamma^j_{00} = \sum_{0}^{3}{}_l \delta_{lj} e_j \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial g_{0l}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^l}\right) + \textcircled{3} = \sum_{0}^{3}{}_l \delta_{lj} e_j \left(\frac{\partial g_{0l}}{\partial x^0} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^l}\right) + \textcircled{3}$$
$$= e_j\left(\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}\right) + \textcircled{3} = -2e_j\delta_{0j}\frac{\partial\gamma}{\partial x^0} + e_j\frac{\partial\gamma}{\partial x^j} + \textcircled{3}.$$

Donc

$$\sum_{hj\,0}^{3} \Gamma^{j}_{00}\,\Gamma^{h}_{hj} = -4\sum_{j\,0}^{3} e_j\,\delta_{0j}\,\frac{\partial\gamma}{\partial x^0}\,\frac{\partial\gamma}{\partial x^j} + 2\sum_{j\,0}^{3} e_j\left(\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}\right)^2 + \textcircled{3} = -2\Delta^0_1\gamma + \textcircled{3}.$$

On a enfin

(III.43) $$G^{(2)}_{00} = 4\Delta^0_1\gamma + \textcircled{3}.$$

La première équation d'Einstein est donc, aux termes du troisième ordre près,

(III.44) $$-\square^0\gamma - \square^0 Z - \Delta^0_2\gamma^2 + 4\Delta^0_1\gamma = -\varkappa\tau_{00},$$

et pour notre but doit être encore transformée.

4. **Transformation de l'équation (III.44) à l'aide du principe de conservation de la masse, interprété dans l'espace ordinaire.** — A cet effet, il est essentiel de rappeler notre prémisse (*cf.* § 1, n° 2) que l'espace-temps où se passent les phénomènes gravitationnels doit être censé très proche d'une variété euclidienne, les variables x^0, x^1, x^2, x^3 étant à leur tour très peu différentes du temps astronomique ordinaire multiplié par c et des coordonnées cartésiennes d'espace. Dans ces conditions les relations entre les coordonnées x^1, x^2, x^3 d'un même point et éventuellement le temps x^0 qui découlent des équations d'Einstein pourront être intuitivement interprétées tout bonnement comme s'il s'agissait des coordonnées cartésiennes dans l'espace ordinaire et x^0 fût le temps römerien.

Les petites inégalités introduites de la sorte par le schéma relativiste, c'est-à-dire formellement par les termes du second ordre dans nos équations, constituent justement la pierre de touche permettant de contrôler par des observations astronomiques quelques conséquences de la nouvelle Mécanique einsteinienne.

Rappelons-nous maintenant que $\varepsilon\sqrt{-g}\,dx^0\,dS$ représente une quantité élémentaire d'énergie se déplaçant le long de sa ligne horaire (*cf.* Chap. I, § 2, n° 9). Cette ligne horaire a une image bien déterminée dans l'espace abstrait x^0, x^1, x^2, x^3 ou même dans l'espace, où x^0 s'interprète comme temps et x^1, x^2, x^3 comme coordonnées cartésiennes. Sur la ligne horaire ainsi envisagée il y a un étalage d'une quantité d'énergie représentée par $\varepsilon\sqrt{-g}\,dx^0\,dS$. En supprimant l'élément de la quatrième dimension dx^0, ou plus

précisément en divisant par l'élément de temps (propre) ds (qui en conditions ordinaires est très proche de dx^0), il vient à correspondre au volume euclidien dS l'énergie

$$\varepsilon \sqrt{-g} \frac{dx^0}{ds} dS.$$

Le rapport de cette quantité à dS, c'est-à-dire

$$\text{(I.22)} \qquad \eta = \varepsilon \sqrt{-g} \frac{dx^0}{ds},$$

représente donc la densité (tridimensionnelle) de la distribution d'énergie qui est subordonnée à un instant quelconque x^0, dans l'espace euclidien S, où s'exercent nos intuitions et nos mesures.

Nous venons de dire que $\frac{dx^0}{ds}$ est très voisin de l'unité. Il en est de même de $\sqrt{-g}$, de façon que la densité d'énergie η (dans l'espace ordinaire où l'on projette pour ainsi dire la théorie) est très peu différente de la quantité ε. La densité de la matière occupant, à un instant donné, le même espace est alors

$$\text{(III.45)} \qquad \mu = \frac{\eta}{c^2},$$

d'après la conception fondamentale d'Einstein de la proportionnalité entre matière et énergie.

En rappelant plus précisément que

$$\text{(III.14)} \qquad \frac{ds}{dx^0} = 1 - \gamma - \frac{1}{2}\beta^2 + \textcircled{2},$$

$$\text{(III.33)} \qquad \sqrt{-g} = 1 + 2\gamma + \textcircled{2},$$

on a, au second ordre près,

$$\text{(III.46)} \qquad \varepsilon = (1 - 2\gamma)\left(1 - \gamma - \frac{1}{2}\beta^2\right)\eta = \left(1 - 3\gamma - \frac{1}{2}\beta^2\right)\eta,$$

d'où l'on tire que, dans tout terme, ou toute combinaison, d'ordre 2 (ou devenant finalement de cet ordre), on peut tranquillement remplacer ε par η, leur différence étant du premier ordre.

Ceci nous autorise à écrire

$$\text{(III.47)} \qquad -\frac{1}{2}x\eta$$

et

(III.48) $$\frac{1}{2}\varepsilon + \eta(\beta^2 - \gamma)$$

respectivement à la place de

(III.47') $$-\frac{1}{2}\varkappa\varepsilon = \Delta_2^0\gamma$$

et de

(III.48') $$\tau_{00}$$

dans l'équation d'Einstein qui est l'objet de notre analyse.

En remarquant que, dans cette équation, on peut substituer $-\Delta_2^0 Z$ à $\square^0 Z$ parce que Z est une quantité de second ordre, on pourra écrire l'équation d'Einstein envisagée sous la forme suivante :

$$\Delta_2^0(Z - \gamma^2) = \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^{0^2}} + \frac{1}{2}\varkappa(\eta - \varepsilon) - \varkappa\eta(\beta^2 - \gamma) - 4\Delta_1^0\gamma.$$

Mais, d'après la relation (III.46), on a

$$\eta - \varepsilon = \eta\left(3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2\right),$$

donc, le second membre est

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^{0^2}} + \frac{1}{2}\varkappa\eta\left(3\gamma + \frac{1}{2}\beta^2\right) + \varkappa\eta\gamma - \varkappa\eta\beta^2 - 4\Delta_1^0\gamma$$
$$= \frac{\partial^2\gamma}{\partial x_0^{0}} + \frac{1}{2}\varkappa\eta\gamma + \frac{1}{2}\varkappa\eta\, 4\gamma - 4\Delta_1^0\gamma - \frac{1}{2}\varkappa\eta\frac{3}{2}\beta^2$$
$$= \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^{0^2}} + \frac{1}{2}\varkappa\eta\gamma - 4(\Delta_1^0\gamma + \gamma\Delta_2^0\gamma) - \frac{1}{2}\varkappa\eta\frac{3}{2}\beta^2$$

ou enfin, si l'on observe que

$$\Delta_2^0\gamma^2 = 2(\Delta_1^0\gamma + \gamma\Delta_2^0\gamma),$$

le dit second membre se réduit à

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^{0^2}} + \frac{1}{2}\varkappa\eta - 2\Delta_2^0\gamma^2 - \frac{1}{2}\varkappa\eta\frac{3}{2}\beta^2,$$

et l'équation correspondante, à

(III.49) $$\Delta_2^0(Z + \gamma^2) = \frac{1}{2}\varkappa\eta\gamma - \frac{1}{2}\varkappa\eta\frac{3}{2}\beta^2 + \frac{\partial^2\gamma}{\partial x^{0^2}}.$$

5. Intégration de l'équation (III.49). — Nous poserons encore

$$Z = -\gamma^2 + \zeta \tag{III.50}$$

et

$$\zeta = \varphi + \psi + \upsilon, \tag{III.51}$$

les fonctions φ, ψ, υ devant satisfaire aux équations

$$\Delta_2^0 \varphi = \frac{1}{2} \varkappa \eta \gamma, \tag{III.52}$$

$$\Delta_2^0 \psi = -\frac{1}{2} \varkappa \eta \frac{3}{2} \beta^2, \tag{III.53}$$

$$\Delta_2^0 \upsilon = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^{0^2}}, \tag{III.54}$$

dont l'intégration dans les conditions qui nous intéressent est immédiate.

Le second membre de la première est

$$\frac{4\pi f}{c^4} \eta \gamma = -4\pi \frac{f}{c^2} \frac{\eta}{c^2} \gamma = -4\pi \frac{f}{c^2} \mu \gamma,$$

d'après (III.45), donc il suffit de rappeler l'équation de Poisson pour attribuer à φ l'expression

$$\varphi = -\frac{f}{c^2} \int_S \frac{\mu \gamma}{r} dS. \tag{III.55}$$

où l'intégration peut être étendue à l'espace S tout entier,

D'une façon analogue on trouve que

$$\psi = \frac{3}{2} \frac{f}{c^2} \int_S \frac{\mu \beta^2}{r} dS. \tag{III.56}$$

Enfin, pour intégrer la troisième équation, rappelons que

$$\Delta_2^0 r = \frac{2}{r}.$$

Dès lors on a

$$\Delta_2^0 \upsilon = \frac{f}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} \int_S \frac{\mu\, dS}{r} = \frac{1}{2} \frac{f}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} \int_S \mu \Delta_2^0 r\, dS. \tag{III.57}$$

Comme les opérateurs $\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}}$, Δ_2^0 sont permutables, il s'ensuit

$$\Delta_2^0 \left(\upsilon - \frac{1}{2} \frac{f}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} \int_S \mu r\, dS \right) = 0, \tag{III.58}$$

ce qui suffit pour affirmer que la quantité sous le signe Δ_2^0 doit être identiquement nulle, parce qu'elle est partout régulière et nulle à l'infini.

Donc

(III.59) $$\upsilon = \frac{1}{2}\frac{f}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2}\int_S \mu\, r\, dS.$$

6. **Résumé des calculs précédents.** — Nous pouvons maintenant rassembler les résultats de l'intégration approchée des équations d'Einstein, c'est-à-dire l'expression analytique des dix potentiels gravitationnels.

On a

(III.60) $$\begin{cases} g_{ik} = 0 & (i \neq k,\ i,\ k = 1,\ 2,\ 3), \\ g_{ii} = -(1 + 2\gamma) & (i > 0), \\ g_{0i} = 4\gamma_i + \textcircled{2} & (i > 0), \\ g_{00} = 1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\zeta; \end{cases}$$

(III.51) $$\zeta = \varphi + \psi + \upsilon,$$

où

(III.27) $$\gamma = \frac{f}{c^2}\int_S \frac{\mu\, dS}{r},$$

(III.30) $$\gamma_i = \frac{f}{c^2}\int_S \frac{\mu\beta_i}{r}\, dS \qquad (i = 1,\ 2,\ 3);$$

(III.55) $$\varphi = -\frac{f}{c^2}\int_S \frac{\mu\gamma}{r}\, dS,$$

(III.56) $$\psi = \frac{3}{2}\frac{f}{c^2}\int_S \frac{\mu\beta^2}{r}\, dS,$$

(III.59) $$\upsilon = \frac{1}{2}\frac{f}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial {x^0}^2}\int_S \mu\, r\, dS.$$

Or, les coordonnées x^i étant désormais à envisager comme cartésiennes rectangulaires, on a

$$\beta_i = \frac{dx^i}{dx^0} \qquad \text{et} \qquad \beta^2 = \sum_1^3{}_i\, \beta_i^2,$$

tandis que le ds^2 originaire s'écrit

(III.61) $$ds^2 = (1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\zeta)\, d{x^0}^2 - (1 + 2\gamma)\, dl_0^2 + 8\, dx^0 \sum_1^3{}_i\, \gamma_i\, dx^i,$$

où

$$dl_0^2 = \sum_1^3{}_i\, dx^{i2}. \tag{III.62}$$

Cette forme explicite du ds^2 va jouer un rôle fondamental dans la formation des équations différentielles du mouvement.

On peut en déduire l'expression de $\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2$, c'est-à-dire

$$\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 = 1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\zeta - (1+2\gamma)\beta^2 + 8\sum_1^3{}_i\,\gamma_i\beta_i. \tag{III.63}$$

CHAPITRE IV.

EFFORTS INTÉRIEURS ET POSSIBILITÉ DE S'EN PASSER DANS L'APPROXIMATION ENVISAGÉE.

1. Le tenseur énergétique. Pression et son invariance le long des lignes horaires dans le cas des corps célestes.

1. Remarques générales. — Dans le Chapitre II on a fixé l'attention en concept, et conséquemment à l'égard du théorème d'existence, sur les milieux désagrégés (poussière cosmique) pour lesquels on peut poser

$$T_{ik} = \varepsilon\lambda_i\lambda_k, \tag{I.29}$$

ou, si l'on veut,

$$T^{ik} = \varepsilon\lambda^i\lambda^k. \tag{I.29'}$$

M. Einstein a tout de suite, verbalement à l'un de nous, présenté l'objection que les corps célestes ne sont nullement identiques à de la poussière cosmique, en exprimant le doute qu'il ne soit guère possible d'établir de la sorte une théorie incluant dans les cas les plus importants les éléments essentiels de ce qui se passe en réalité.

Puisque, pour assurer l'individualité et la consistance des corps célestes, interviennent essentiellement les efforts intérieurs, on doit comme première approximation remplacer les positions ci-dessus qui ignorent ces efforts par un schéma où l'on introduit des efforts intérieurs sous la forme particulièrement simple d'une pression isotropique.

Le tenseur énergétique s'exprime alors sous la forme adoptée par M. Synge, c'est-à-dire

(IV.1) $$T_{ik} = (\varepsilon + p)\lambda_i\lambda_k - p g_{ik},$$

se réduisant manifestement à (I.29) pour $p = 0$.

2. Hypothèse relativistique se rapportant à la pression. — Comme postulat fondamental à l'égard de cette pression p, nous adopterons l'hypothèse que la pression p qui règne dans une particule mobile se conserve pendant le mouvement, c'est-à-dire tout le long de sa ligne horaire.

L'expression mathématique d'une telle hypothèse se traduit par la formule

(IV.2) $$\frac{dp}{ds} = 0,$$

dont l'invariance relativistique est évidente.

Au point de vue physique cette hypothèse est assurément satisfaite pour les corps célestes qui se comportent sensiblement comme des solides.

2. Retour aux équations du mouvement.

1. Contribution de p aux composantes τ_{ik}. Vitesse du son à l'intérieur du milieu gravitant. — D'après l'expression

(IV.1) $$T_{ik} = (\varepsilon + p)\lambda_i\lambda_k - p g_{ik},$$

le terme en p dans l'invariant

(II.3) $$T = \sum g^{ik} T_{ik}$$

est

(IV.3) $$T^* = p \sum g^{ik}(\lambda_i\lambda_k - g_{ik}) = -3p.$$

De même le terme en p dans

(II.2) $$\tau_{ik} = T_{ik} - T g_{ik}$$

est

(IV.4) $$\tau^*_{ik} = p(\lambda_i\lambda_k - g_{ik}) - T^* g_{ik} = p(\lambda_i\lambda_k + 2 g_{ik}).$$

Il est inutile de tenir compte de ces termes additionnels dans les équations différentielles

(III.23) $$\Delta_2^0 \gamma_{ik} = -\varkappa \tau_{ik},$$

dans le cas où les indices ne sont pas nuls à la fois, puisque l'on peut alors négliger les termes d'ordre supérieur au premier qui sont multipliés par ε.

Ceci résulte immédiatement de ce que

(IV.5) $$\frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{c^2} \frac{p}{\mu}$$

peut être regardé comme une quantité du premier ordre.

En effet, en supposant que dans le milieu envisagé soient valables du moins grossièrement les lois de la Physique ordinaire, le rapport $\frac{p}{\mu}$ de la pression à la densité peut s'interpréter (en régime isotherme) comme le carré de la vitesse du son qui n'est pas trop supérieur, souvent même inférieur au carré de la vitesse des corps célestes. Il s'agit donc de termes de l'ordre de β^2.

2. **Modification de ε due à la pression.** — Il importe au contraire de tenir compte des termes indiqués tout a l'heure dans l'équation

(III.23) $$\Delta_2^0 \gamma_{00} = -\varkappa \tau_{00},$$

puisqu'il nous faut calculer γ_{00} jusqu'au second ordre inclu.

D'après ce qui précède, le terme additionnel dans τ_{00} est (IV.4)

$$\tau_{00}^* = p\,(\lambda_0^2 + 2\,g_{00}),$$

de sorte que le terme additionnel dans le second membre de l'équation (III.23) peut s'écrire

$$-\varkappa p\,(\lambda_0^2 + 2\,g_{00}) = -\varkappa p\left(3 + \textcircled{2}\right) = -\varkappa\varepsilon\frac{p}{\varepsilon}\left(3 + \textcircled{2}\right) = -3\,\varkappa\varepsilon\frac{p}{\varepsilon}\left(1 + \textcircled{2}\right),$$

ayant pu remplacer, soit λ_0^2, soit g_{00} par l'unité.

L'opération B appliquée au produit $-3\,\varkappa\varepsilon\frac{p}{\varepsilon}\,\textcircled{2}$ apporterait d'après le Chapitre III (§ 1) une contribution du quatrième ordre qu'on peut négliger sans plus, tandis que $-3\varkappa p$ entraîne dans l'expression de γ_{00} un potentiel adimensionnel ayant pour densité $-3\,\varkappa p$ au facteur $\frac{2f}{c^2}$ près.

En réunissant ce terme complémentaire avec le potentiel du premier ordre γ provenant de la densité ε, on en tire un potentiel unique pour chacun des corps ayant la densité

$$\varepsilon' = \varepsilon\left(1 - \frac{3p}{\varepsilon}\right)$$

au même facteur près.

En admettant que nos corps jouissent, à l'égard de la pression p de la symétrie déjà supposée pour la distribution matérielle ε, on peut remplacer dans nos calculs ε par ε'.

Quant aux termes du second-ordre dans lesquels figurerait encore ε, on peut évidemment imaginer d'écrire, sans modification sensible, ε' au lieu de ε, quitte à supprimer l'accent partout.

On en déduit que les équations de Poisson définissant les dix potentiels $\gamma_{ik}(i, k = 0, 1, 2, 3)$ sont exactement les mêmes qu'on avait en l'absence de pression, sauf la signification moins simple de la quantité ε.

3. Équations du mouvement remplaçant le principe géodésique et leur interprétation à la manière classique. — Examinons d'autre part comment l'intervention de la pression modifie les quatre équations de conservation, c'est-à-dire en substance les équations du mouvement. En tenant compte de p, les équations (I..32') deviennent

$$\text{(IV.6)} \quad (\varepsilon + p)k_i - \lambda_i\left[\frac{d(\varepsilon + p)}{ds} + (\varepsilon + p)\operatorname{div}\boldsymbol{\lambda}\right] - p_i = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3).$$

Comme le vecteur de courbure $\mathbf{k}$ est orthogonal aux lignes horaires, c'est-à-dire

$$\sum_{i=0}^{3} k_i\lambda^i = 0,$$

en multipliant les équations précédentes par $-\lambda_i$ et additionnant, on tire

$$\frac{d(\varepsilon + p)}{ds} + (\varepsilon + p)\operatorname{div}\boldsymbol{\lambda} + \sum_{i=0}^{3} p_i\lambda^i = 0.$$

Le dernier terme s'annule à cause du postulat se rapportant à la pression et il reste

$$\text{(IV.7)} \qquad \frac{d\varepsilon}{ds} + (\varepsilon + p)\operatorname{div}\boldsymbol{\lambda} = 0.$$

D'après cette conséquence, les équations de conservation (I.32′) se réduisent à

(IV.6′) $$(\varepsilon + p)\, k_i - p_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3).$$

On peut évidemment rapporter ces équations simplement à l'espace x^1, x^2, x^3, puisque la quatrième équation, $i = 0$, se réduit à une identité, à cause du postulat susdit et de la propriété de la courbure

$$\sum_{0}^{3}{}_i\, k_i \lambda^i = 0,$$

rappelée tout à l'heure.

3. Conséquences globales pour chaque corps.

1. **Équations du mouvement des centres de gravité.** — Au paragraphe précédent on a établi les équations (IV.6′) du mouvement pour chaque élément matériel du milieu envisagé. On voit que l'influence locale de la pression n'est pas en général négligeable, étant analytiquement traduite par la circonstance que, au lieu de

$$k_i = 0 \qquad (i = 0, 1, 2, 3)$$

(mouvement géodésique) on a, d'après (IV.6′),

$$k_i = -\frac{p_i}{\varepsilon + p}$$

qui sont les composantes covariantes du vecteur $-\dfrac{1}{\varepsilon + p}\operatorname{grad} p$.

2. **Distribution symétrique de la pression.** — Bien que, comme on vient de dire, l'influence locale ne s'annule pas, il est loisible de conclure que, à la suite de l'ensemble de nos hypothèses, la première approximation reste la même.

En effet, si l'on considère justement le centre de gravité d'un de nos corps, pourvu que la condition de symétrie soit encore satisfaite, le gradient de la pression s'annule pour le centre de gravité.

Son mouvement est donc régi encore par les équations

$$k_i = 0,$$

exprimant le principe géodésique.

3. Légitimité de se borner aux milieux désagrégés. — Il est donc légitime de borner notre analyse de première approximation, comme on l'a plusieurs fois annoncé, aux milieux désagrégés.

CHAPITRE V.

RÉDUCTION A DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

I. Fonction de Lagrange.

1. Rappel du principe géodésique. — Le mouvement de tout élément matériel est caractérisé dans l'espace temps par une ligne géodésique propre du ds^2 que nous venons de trouver.

C'est le principe géodésique bien connu, formulé, comme nous l'avons déjà dit au Chapitre I, par Einstein avant même d'avoir reconnu les liens des potentiels gravitationnels avec la matière et son mouvement.

Sous l'aspect analytique, il affirme que les mouvements propres (le long desquels $ds^2 > 0$) sont définis par le principe variationnel

$$\delta \int ds = 0. \tag{I.}$$

La variation qui doit s'annuler se rapporte, dans l'image géométrique quadridimensionnelle, au passage de la ligne horaire dont il s'agit à toute autre ligne infiniment voisine, ayant mêmes extrémités.

Il faut donc attribuer, dans (I.), aux quatre coordonnées x^0, x^1, x^2, x^3 des accroissements infiniment petits arbitraires, sauf la condition de s'annuler aux extrémités. Mais on démontre (¹) qu'on peut se passer de faire varier x^0, puisque, de ce fait, le premier membre de (I.) subit une variation, qui s'annule en conséquence des conditions provenant de la variation des trois coordonnées d'espace x^1, x^2, x^3.

Ceci posé, attribuons à (I.) une forme équivalente, mais plus avantageuse pour les comparaisons éventuelles avec l'ancienne Mécanique.

(¹) *Cf.* T. LEVI-CIVITA, *Absolute differential calculus*, p. 289-290.

On a

$$\left(\frac{ds}{dx^0}\right)^2 = 1 - 2\gamma + 2\gamma^2 - 2\zeta - (1+2\gamma)\beta^2 + 8\sum_i^3{}_1 \gamma_i\beta_i$$

$$= 1 - 2\mathfrak{N} + 2\gamma^2 - 2\zeta - 2\gamma\beta^2 + 8\sum_i^3{}_1 \gamma_i\beta_i,$$

où la fonction

(V.1) $$\mathfrak{N} = \frac{1}{2}\beta^2 + \gamma$$

est évidemment la fonction lagrangienne que l'on obtiendrait, *caeteris paribus*, en Mécanique newtonienne, définissant le mouvement d'un élément générique de matière dépourvue de dimensions.

En extrayant la racine carrée, on obtient

(V.2) $$\frac{ds}{dx^0} = 1 - \mathfrak{N} + \gamma^2 - \zeta - \gamma\beta^2 + 4\sum_i^3{}_1 \gamma_i\beta_i - \frac{1}{2}\mathfrak{N}^2,$$

aux termes d'ordre supérieur au second près.

2. Construction de la fonction lagrangienne. — Or, l'équation variationnelle (I.) peut être écrite sous la forme

(V.3) $$\delta\int\left(1 - \frac{ds}{dx^0}\right)dx^0 = 0,$$

puisque

$$\delta\int dx^0 = 0,$$

à cause de la remarque que nous avons faite à propos de la possibilité de ne pas soumettre à variation la variable x^0.

On peut donc considérer comme fonction lagrangienne

$$\mathfrak{L} = 1 - \frac{ds}{dx^0}$$

et l'on a explicitement

(V.4) $$\mathfrak{L} = \mathfrak{N} + \mathfrak{O},$$

où

(V.5) $$\mathfrak{O} = \frac{1}{2}\mathfrak{N}^2 - \gamma^2 + \zeta + \gamma\beta^2 - 4\sum_i^3{}_1 \gamma_i\beta_i.$$

C'est la fonction $\mathcal{D}$ qui caractérise la petite modification einsteinienne du mouvement de tout élément matériel et que nous nous proposons maintenant d'étudier d'une manière approfondie.

2. Entourage immédiat du point mobile.

1. **Notations.** — En ayant en vue de bien préciser les différents points qui marquent la différence entre la position classique et la position relativistique du problème, nous ferons ici quelques remarques préliminaires sur les circonstances (bien connues séparément, mais devant être envisagées à la fois) qui permettent de réduire le problème du mouvement gravitationnel de plusieurs corps massifs à celui d'un nombre égal de points matériels.

Dans l'expression de la fonction lagrangienne $\mathcal{L}$, que nous avons trouvée tout à l'heure, interviennent essentiellement quelques potentiels étendus au domaine S (de l'espace euclidien x^1, x^2, x^3) occupé par ces corps attirants à un instant donné.

Supposons en particulier que le point P dont il s'agit appartienne à un corps C (dont nous désignerons par la même lettre aussi le champ qu'il occupe).

Nous pourrons imaginer de décomposer les potentiels cités en deux parties dont l'une est étendue à C, l'autre à la portion résiduelle S' de S.

Le potentiel γ est le seul terme du premier ordre et par conséquent le plus important.

Quoi qu'il en soit, nous désignerons par la notation γ', φ', ... la partie des potentiels étendue à S' et par la notation γ'', φ'', ... celle qui concerne le champ C.

On aura en conformité

$$\gamma = \gamma' + \gamma'', \quad \varphi = \varphi' + \varphi'', \quad \ldots \tag{V.6}$$

Plus généralement, une fonction des mêmes potentiels, telle que $\mathcal{N}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, peut être décomposée de la même manière

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}' + \mathcal{N}'', \quad \mathcal{D} = \mathcal{D}' + \mathcal{D}'', \quad \ldots, \tag{V.6'}$$

où $\mathcal{N}'$, $\mathcal{D}'$, ... est la partie que l'on aurait si le corps C était supprimé, tandis que $\mathcal{N}''$, $\mathcal{D}''$, ... caractérise l'influence du corps C sur le mouvement de P.

2. Forces intérieures et principe d'effacement dans la Mécanique classique. Remarque sur les valeurs numériques. — M. Brillouin a heureusement appelé *principe d'effacement* la possibilité d'aboutir, sous certaines spécifications convenables, à la conclusion que le terme $\mathcal{L}''$ n'exerce aucune influence sur le mouvement de P.

Remarquons ici que dans la Mécanique classique les spécifications ci-dessus découlent substantiellement du principe de réaction.

Mais examinons la chose dans le schéma relativiste susdit.

D'une façon précise, on a

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}' + \gamma'', \tag{V.7}$$

où

$$\mathcal{M}' = \frac{1}{2}\beta^2 + \gamma', \tag{V.8}$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}(\mathcal{M}' + \gamma'')^2 - (\gamma' + \gamma'')^2 + \zeta' + \zeta'' + (\gamma' + \gamma'')\beta^2 - 4\sum_{1}^{3}{}_i(\gamma'_i + \gamma''_i)\beta_i, \tag{V.9}$$

ayant posé

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}' + \mathcal{D}'', \tag{V.10}$$

$$\mathcal{D}' = \frac{1}{2}\mathcal{M}'^2 - \gamma'^2 + \zeta' + \gamma'\beta^2 - 4\sum_{1}^{3}{}'_i \gamma'_i\beta_i, \tag{V.11}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'' &= \mathcal{M}'\gamma'' - \frac{1}{2}\gamma''^2 - 2\gamma'\gamma'' + \zeta'' + \gamma''\beta^2 - 4\sum_{1}^{3}{}_i \gamma''_i\beta_i \\ &= \mathcal{M}'\gamma'' - \frac{1}{2}\gamma''^2 - 2\gamma'\gamma'' + \varphi'' + \psi'' + \upsilon'' + \gamma''\beta^2 - 4\sum_{1}^{3}{}_i \gamma''_i\beta_i.\end{aligned} \tag{V.12}$$

Donc

$$\mathcal{L}'' = \gamma'' + \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \gamma'\right)\gamma'' - \frac{1}{2}\gamma''^2 - 2\gamma'\gamma'' + \zeta'' + \gamma''\beta^2 - 4\sum_{1}^{3}{}_i \beta_i\gamma''_i. \tag{V.13}$$

A la vérité, on ne peut pas penser que $\mathcal{L}''$ soit, ni même devienne sous certaines hypothèses, négligeable, vis-à-vis de $\mathcal{L}'$, et on le constate tout de suite en tenant compte simplement des termes du premier ordre (tous deux positifs).

En effet, *le potentiel γ'' est bien prépondérant sur γ'*. Il suffit de

considérer le cas typique d'un système de corps C_ν attirants de masses et dimensions comparables.

La contribution γ'' du corps C qui contient P à son intérieur est assurément supérieure à celle de tout autre corps C_ν, parce que les distances des points de C sont inférieures aux distances analogues des points de tout corps C_ν.

Considérons pour bien fixer les idées le cas élémentaire de plusieurs sphères homogènes.

Soient R et m le rayon et la masse de C, R_ν et m_ν les quantités analogues de C_ν et supposons que P soit le centre de C.

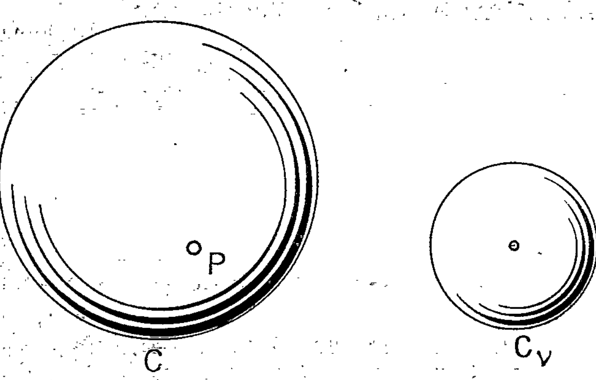


Fig. 1.

La contribution à γ' du corps C_ν est

$$\frac{fm_\nu}{c^2}\frac{1}{r_\nu}.$$

La valeur en P (centre de C) du potentiel de cette sphère est $\frac{3}{2}\frac{fm_\nu}{c^2}\frac{1}{R}$, comme il est bien connu.

L'ordre de grandeur de γ' par rapport à une γ_ν est donc

$$\frac{\gamma}{\gamma_\nu}\sim\frac{r_\nu}{R},$$

c'est-à-dire dans le cas des corps célestes l'ordre du rapport d'une des distances mutuelles au rayon d'un corps (sphère attirante), ce qui n'est nullement négligeable.

Mais il faut remarquer que cette difficulté préliminaire se présente aussi dans la Mécanique ordinaire où $\mathcal{L}'$ se réduit à $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{L}''$ à γ''.

En effet, dans ce cas les équations lagrangiennes du mouvement de P sont

$$\frac{d}{dx^0}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{V.14}$$

c'est-à-dire

$$\dot{\beta}_i = \frac{\partial \gamma'}{\partial x^i} + \frac{\partial \gamma''}{\partial x^i} \qquad \left(\cdot = \frac{d}{dx^0}\right), \tag{V.14'}$$

où les dérivées qui interviennent dans les seconds membres représentent évidemment, au facteur $\frac{1}{c^2}$ près, les forces newtoniennes respectivement extérieures et intérieures au corps C.

Les considérations précédentes nous montrent que les forces intérieures qui proviennent de γ'' sont individuellement considérées, en général comme plus intenses que les forces extérieures dues au potentiel γ'.

Toutefois, il faut se souvenir qu'il existe une combinaisont classique de ces équations, l'équation qui régit le mouvement du centre de gravité, dans laquelle les contributions de γ'' (ou mieux de ses dérivées) se détruisent mutuellement deux à deux.

C'est là en concept l'origine du principe d'effacement dans la Mécanique classique.

En Mécanique relativiste, on doit considérer non seulement γ'', mais aussi tous les termes du second ordre, pour atteindre l'approximation immédiatement supérieure à l'approximation newtonienne.

Il faut donc tâcher d'éliminer avant tout, des équations du mouvement, les termes du premier ordre qui proviendraient de γ'' et qui en définitive disparaissent des équations newtoniennes du mouvement, ce qu'on obtient en faisant encore intervenir d'une manière appropriée la considération du centre de gravité. Mais, il convient de simplifier en même temps, autant qu'il est possible, la partie du second ordre $\mathcal{L}''$.

3. Critères numériques pour la conduite du calcul. — Nous nous proposons donc maintenant d'introduire certaines hypothèses préalables sur les corps et leurs mouvements, grâce auxquelles on peut simplifier les équations avec une approximation largement suffisante

pour saisir les différences essentielles vis-à-vis de la Mécanique newtonienne ordinaire.

A cet effet, nous pourrons nous borner à évaluer dans les termes du second ordre du type

$$\beta_\mu^2, \quad \gamma_\nu \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \ldots, n-1),$$

chacun des facteurs avec une approximation assez grossière, par exemple à peine de un pour cent.

Ce critère nous conduira à des conclusions évidemment moins approchées que celles qu'on pourrait déduire des équations lagrangiennes indiquées tout à l'heure (où les termes $\mathfrak{N}$ newtoniens sont du premier ordre et les termes renfermés dans $\mathfrak{D}$ sont du second ordre) sans modifications ultérieures.

Alors, en effet, l'approximation sur laquelle on peut compter, c'est-à-dire le rapport entre l'ordre de grandeur du second ordre et celui du premier, est $10^{-12} : 10^{-6} = 10^{-6}$.

Si, au contraire, nous nous permettons en surplus d'évaluer quelque facteur du premier ordre figurant dans $\mathfrak{D}$ *à moins de* 10^{-n} (pour simplifier nous avons posé $n = 2$), on pourra compter sur une approximation non plus de 10^{-6}, mais seulement de $10^{-n} (n < 6)$.

4. Considérations préparatoires pour la réduction à un nombre fini de points matériels. — Ceci posé, nous allons envisager la combinaison du centre de gravité (essentielle pour détruire les contributions de γ'') et en même temps la structure des différents termes (du second ordre) d'où résulte $\mathfrak{D}$.

A cet effet, il faut considérer la totalité des points matériels P dont le corps C est constitué; pour chacun d'eux sont valables les équations différentielles dont la fonction de Lagrange $\mathcal{L}$ en première approximation se réduit à la partie newtonienne

$$\text{(V.7)} \qquad \mathfrak{N} = \frac{1}{2}\beta^2 + \gamma' + \gamma''.$$

Le centre de gravité de tous ces points P se meut comme si les forces intérieures n'existaient pas ou, ce qui revient au même, a pour fonction de Lagrange

$$\mathfrak{N}' = \frac{1}{2}\beta^2 + \gamma',$$

la partie γ'' s'éliminant d'elle-même dans les équations différentielles.

C'est sur ce résultat qu'il convient de passer à une approximation ultérieure pour la fonction de Lagrange de notre problème.

Les équations différentielles qui se dégagent du principe géodésique sont

$$\text{(V.15)} \qquad \frac{d}{dx^0}\frac{\partial(\mathfrak{N}+\mathcal{O})}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial(\mathfrak{N}+\mathcal{O})}{\partial x^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

ou, si l'on veut,

$$\text{(V.15')} \qquad \dot{\beta}_i = \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x^i} - \frac{d}{dx^0}\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial \dot{x}^i} \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Les termes $\frac{\partial \gamma}{\partial x^i}$ des seconds membres sont les forces newtoniennes et les termes résiduels représentent les perturbations einsteiniennes.

Les trois combinaisons linéaires classiques qui expriment le principe du mouvement du centre de gravité G sont

$$\text{(V.16)} \qquad \dot{\beta}_i = \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} + \frac{1}{m}\int_C \mu\left(\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x^i} - \frac{d}{dx^0}\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial \dot{x}^i}\right) dC,$$

où

$$\text{(V.17)} \qquad m = \int_C \mu\, dC$$

est la masse de C et les premiers membres ne sont pas autre chose que les composantes de l'accélération de G et les seconds membres les composantes, réduites à l'unité de masse, des forces, séparées dans la partie newtonienne (qui est bien du premier ordre) et dans les binômes

$$\text{(V.18)} \qquad \Pi_i = \frac{1}{m}\int_C \mu \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x^i} dC - \frac{1}{m}\int_C \mu \frac{d}{dx^0}\frac{\partial \mathcal{O}}{\partial \dot{x}^i} dC$$

qui caractérisent précisément la perturbation provoquée sur le mouvement du centre de gravité.

On s'aperçoit que le calcul des Π_i serait très compliqué soit à cause de la structure de la fonction $\mathcal{O}$ qui dépend à la fois des vitesses et des accélérations de toutes les masses du système S dont il s'agit, soit à cause des intégrations étendues au champ C, dont G est le centre de gravité.

3. Quelques compléments de mécanique ordinaire.

1. Centres de gravitation. — Nous allons maintenant développer quelques notions complémentaires qui sont nécessaires pour la formulation des hypothèses fondamentales sur lesquelles s'appuie notre théorie.

Nous appelons *centre de gravitation* d'un corps C le (ou même tout) point où s'annule la résultante des attractions newtoniennes des éléments matériels du corps.

Il est aisé de voir que, pour chaque corps C, il existe au moins un centre de gravitation.

En effet, le potentiel newtonien U de tout corps (limité) C est une fonction bornée dans tout l'espace (s'annulant à l'infini).

Il existe par conséquent au moins un point P_0 de l'espace où le potentiel atteint son maximum.

En ce point P_0 s'annulent nécessairement les dérivées de U; l'attraction est donc nulle en P_0.

Si nous rappelons encore que U est une fonction harmonique à l'extérieur du corps C et qu'une telle fonction n'est pas maximée, ni minimée à l'intérieur d'un champ de régularité, nous concluons que le point P_0 n'est pas à l'extérieur de C et l'on peut aussi exclure qu'il soit sur le contour de C, si le corps est convexe.

On prouve aisément que si le corps C admet un centre O de symétrie, le point O est un centre de gravitation.

On a, en effet,

$$U(x, y, z) = U(-x, -y, -z), \tag{V.19}$$

si x, y, z sont les coordonnées d'un point quelconque de l'espace par rapport à un système d'axes dont O est l'origine.

De l'identité écrite tout à l'heure, on déduit après coup (en dérivant et posant ensuite $x = y = z = 0$) que les trois dérivées $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ s'annulent au point O.

A la notion de centre de gravitation se rattache celle de *corps centrebarique*. C'est lord Kelvin [1] qui a appelé barycentrique le

[1] Lord KELVIN, TAIT, *Treatise on natural Philosophy*, vol. II, *voir* aussi une Note de M. A. FENICI, *Centri di gravitazione e corpi centrobarici* (*Rend. Lincei*, 1935, p. 493-498).

corps C exerçant sur tout point de l'espace une attraction dirigée vers un point déterminé O.

Alors, O est en même temps centre de gravitation et centre de gravité de C.

Dans un tel cas, l'ellipsoïde d'inertie du corps s'y réduit à une sphère.

2. Condition de substantialité du centre de gravité. Symétries (²). — Par définition le centre de gravité G d'un système (continu) S qui, à l'instant t, occupe un champ C, est caractérisé par l'équation

$$\text{(V.20)} \qquad G - O = \frac{1}{m}\int_C (P - O)\, dm \qquad (m = \text{masse}),$$

où le point O est un point arbitraire pour lequel nous choisissons l'origine d'un système cartésien $Oxyz$. Si $\mathbf{v}(P \mid t)$ désigne la vitesse à l'instant t d'un point P de S, on a, en dérivant la formule précédente par rapport à t

$$\text{(V.21)} \qquad \dot{G} = \frac{1}{m}\int_C \mathbf{v}(P \mid t)\, dm.$$

D'autre part, la vitesse de l'élément matériel de S qui à l'instant t occupe la position G est $\mathbf{v}(G \mid t)$.

Donc, si le point G doit être attaché toujours à un même élément matériel, on doit avoir

$$\text{(V.22)} \qquad \mathbf{v}(G \mid t) = \frac{1}{m}\int_C \mathbf{v}(P \mid t)\, dm.$$

On peut démontrer que cette condition est aussi suffisante pour qu'un élément qui adhère au centre de gravité à l'instant initial soit toujours barycentral.

On voit aisément que la substantialité du centre de gravité se vérifie non seulement dans les mouvements rigides, mais dans les mouvements homographiques, c'est-à-dire dans des mouvements tels que la distribution des vitesses à chaque instant soit caractérisée par une loi linéaire par rapport aux coordonnées de P

$$\text{(V.23)} \qquad \mathbf{v}(P \mid t) = \mathbf{v}_0(t) + \alpha_t(P - O),$$

(²) T. Levi-Civita, *Movimenti di un sistema continuo che rispettano l'invariabilità sostanziale del baricentro* (*Acc. Pont. Nuovi Lincei*, t. 88, 1935, p. 151-155).

où le symbole α_t désigne une homographie vectorielle dépendant du temps t.

En effet, on a

$$\mathbf{v}(G \mid t) = \mathbf{v}_0(t) + \alpha_t(G - O)$$

et

$$\int_C \mathbf{v}(P \mid t)\, dm = \int_C [\mathbf{v}_0(t) + \alpha_t(P - O)]\, dm = m v_0(t) + \int_C \alpha_t(P - O)\, dm.$$

Mais l'intégration est commutable avec l'homographie, donc

$$\int_C \alpha_t(P - O)\, dm = \alpha_t \int_C (P - O)\, dm$$

et enfin

$$\frac{1}{m}\int_C \mathbf{v}(P \mid t)\, dm = \mathbf{v}_0(t) + \alpha_t \frac{1}{m}\int_C (P - O)\, dm = \mathbf{v}_0(t) + \alpha_t(G - O) = \mathbf{v}(G \mid t).$$

C. Q. F. D.

Remarquons que pour tout corps qui admet à chaque instant un centre G de symétrie géométrique et matérielle, on peut affirmer, d'après les propriétés élémentaires du centre de gravité et ce qu'on vient de dire sur les centres de gravitation, que G est à la fois centre de gravité et de gravitation.

4. Hypothèses ultérieures amenant à des équations différentielles ordinaires.

1. Généralités et hypothèse I. — Nous aurons soin maintenant d'énoncer explicitement les hypothèses additionnelles que nous posons à la base de la théorie relativiste du mouvement gravitationnel.

A la vérité, les conditions que nous envisagerons devraient être des conséquences mathématiques des équations différentielles du mouvement de chaque point. A cause des difficultés insurmontables qu'entraînerait cette manière inflexiblement mathématique d'aborder la question, on trouve qu'il convient de postuler quelques caractères d'ensemble du mouvement ainsi qu'il est conforme aux observations astronomiques.

Hypothèse I. — Nous admettons que le centre de gravité G, de chaque corps C soit substantiel, c'est-à-dire qu'il adhère toujours à un même élément matériel.

Mais il n'est pas nécessaire que cette condition soit vérifiée rigoureusement, il suffit seulement qu'elle soit satisfaite dans l'ordre d'approximation 10^{-n} que nous avons introduit pour la correction einsteinienne, $n \geqq 2$ comme il a été remarqué au nº 3 du paragraphe 2.

Si G est substantiel, son mouvement sera caractérisé comme il arrive pour tout autre point matériel P (*cf.* § 2) par une fonction lagrangienne $\mathcal{L} = \mathcal{N} + \mathcal{Q}$ bien déterminée et la perturbation einsteinienne par le terme $\mathcal{Q}$ correspondant.

Nous admettrons encore que le centre de gravité G soit toujours un centre de gravitation.

2. **Hypothèse II.** — Nous supposons que le corps C soit animé d'un mouvement quasi translatoire. Voici le sens qu'il faut attribuer à cette locution.

Partons de la définition de mouvement de translation d'un corps C. C'est un mouvement dans lequel les points du corps sont, à un instant quelconque, animés tous d'une même vitesse vectorielle, disons de la vitesse $\mathbf{v}_g$ du centre de gravité G.

Pratiquement, on pourra naturellement regarder comme translation tout mouvement pour lequel vis-à-vis de v_g (module du vecteur $\mathbf{v}_g$) soit négligeable la valeur absolue de la différence vectorielle $\Delta\mathbf{v}$ entre les vitesses au même instant de deux points quelconques de C : donc sera négligeable le rapport

$$\frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v_g}. \tag{V.24}$$

Nous ne prétendons pas que ce rapport soit négligeable par lui-même, mais seulement qu'il ne dépasse jamais quelques centièmes (ordre de grandeur 10^{-2}), de manière que l'on puisse omettre, comme quantité d'ordre supérieur au premier, tout produit du type

$$\beta^2 \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v_g}, \quad \gamma \frac{|\Delta\mathbf{v}|}{v_g}, \quad \ldots$$

Nous appelons quasi translatoire un mouvement de cette espèce.

C'est bien ce qui arrive pour les planètes.

D'abord leurs déformations sont négligeables et elles se comportent par conséquent comme des corps sensiblement rigides.

A la vérité leur mouvement n'est pas purement translatoire : il se compose de translation et de rotation.

Toutefois, pour un point quelconque du corps, la vitesse due à la rotation atteint seulement quelques centièmes de la vitesse commune de translation.

Par exemple, dans le cas de la Terre, la vitesse due à la rotation (un tour par jour) a la valeur maximum d'un demi-kilomètre par seconde, tandis que la vitesse de translation est 30 km/sec. Donc

$$\frac{|\Delta \mathrm{v}|}{v_g} \sim 2 \times \frac{1}{60} = 0,03.$$

C'est bien un ordre de grandeur rentrant dans les limites indiquées tout à l'heure.

3. **Hypothèse III.** — Nous supposons que la quantité

$$\left(\frac{d}{r}\right)^2,$$

carré du rapport de la dimension maximum d de C et la distance minimum r entre les points du corps C et ceux de S′ soit négligeable.

On remarquera que cette circonstance est ordinairement admise, depuis Clairaut, dans la Mécanique céleste newtonienne pour réduire le problème classique des n corps à un problème de n points matériels.

Il ne s'agit pas ici d'une approximation grossière, de l'ordre de 10^{-2}, mais bien plus précise, par exemple de l'ordre de 10^{-4} dans le cas typique Soleil-Terre, autrement il faudrait tenir compte des termes correctifs comme il arrive dans l'étude des perturbations dues aux satellites de Jupiter.

4. **Quelques conséquences des hypothèses précédentes.** — Nous remarquons d'abord qu'à cause de l'hypothèse I, les dérivées de γ'' sont nulles en G et comme ce potentiel entre additivement dans $\mathcal{L}$ et porte par conséquent sa contribution aux équations du mouvement seulement à travers ses dérivées, il s'ensuit que γ'' se comporte comme une constante.

D'après l'hypothèse II, les composantes β_i de la vitesse de tout

point de C et le carré β^2 de cette vitesse sont, comme γ'', invariables à l'intérieur de C.

Donc, nous pouvons poser en premier lieu

$$\gamma'' = \varpi = \text{const.} \tag{V.25}$$

Cela entraîne pour φ'', ψ'', ψ''_i, les expressions suivantes :

$$\varphi'' = \frac{f}{c^2} \int_C \frac{\mu\gamma''}{r} dC = \varpi^2, \tag{V.26}$$

$$\psi'' = \frac{3}{2} \frac{f}{c^2} \int_C \frac{\mu\beta^2}{r} dC = \frac{3}{2} \varpi\beta^2, \tag{V.27}$$

$$\gamma''_i = \frac{f}{c^2} \int_C \frac{\mu\beta_i}{r} dC = \varpi\beta_i. \tag{V.28}$$

Enfin, on a

$$\upsilon'' = \frac{1}{2} \frac{f}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{0\,2}} \int_C \mu r \, dC = 0, \tag{V.29}$$

parce que l'intégrale

$$\int_C \mu r \, dC,$$

où r désigne la distance de tout point de C au centre de gravité, ainsi que μdC est une constante pendant le mouvement.

D'après les résultats précédents, on a

$$\mathfrak{M}'\gamma'' = \left(\frac{1}{2}\beta^2 + \gamma'\right)\gamma'' = \varpi\left(\frac{1}{2}\beta^2 + \gamma'\right),$$

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{1}{2}\gamma''^2 &= -\frac{1}{2}\varpi^2, \\ -2\gamma'\gamma'' &= -2\varpi\gamma', \\ \psi'' &= \frac{3}{2}\varpi\beta^2, \\ \gamma''_i &= \varpi\beta_i. \end{aligned}\right. \tag{V.30}$$

Ces expressions comportent des simplifications essentielles dans la structure de la perturbation einsteinienne, mais pour en tenir compte il convient d'envisager la question d'une façon complète en abordant l'ensemble des corps en mouvement.

C'est l'objet du paragraphe qui va suivre.

5. Le problème des n corps.

1. Rayons gravitationnels. Notations. — Nous désignons par C_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$) les corps et par P_ν le centre de gravité de C_ν, m_ν et

$$l_\nu = \frac{fm_\nu}{c^2} \tag{V.31}$$

la masse et le rayon gravitationnel de C_ν.

A rappeler que ce rayon est une longueur qui pour le Soleil est environ un kilomètre et demi.

D'autre part, l'attraction d'un corps céleste C_ν sur un point très éloigné se réduit à fort peu près à celle de toute sa masse réunie à son centre de gravité.

Donc, en vertu de l'hypothèse III, le potentiel du corps C_ν sur le centre de gravité P_h du corps C_h est donné, comme si la masse de C_ν était toute concentrée au centre de gravité P_ν, par

$$\frac{fm_\nu}{r(P_\nu, P_h)} \tag{V.32}$$

et le potentiel adimensionnel correspondant est, par conséquent,

$$\frac{f}{c^2}\,\frac{m_\nu}{r(P_\nu\, P_h)} = \frac{l_\nu}{r(P_\nu, P_h)}. \tag{V.33}$$

Encore, et avec le même degré d'approximation, on peut retenir constant et égal à

$$\frac{l_\nu}{r(P_\nu, P_h)},$$

le potentiel unitaire dû à l'attraction du corps C_ν, à l'intérieur du corps C_h.

Dans notre système planétaire, les rayons gravitationnels l ne dépassent pas celui du Soleil, comme on vient de le rappeler.

Dorénavant, nous affecterons de l'indice h toute quantité qui se rapporte au centre de gravité P_h du corps C_h; par exemple β_h^2 est le carré de la vitesse de P_h, $\beta_{h|i}$ est la composante suivant l'axe x^i de la vitesse de P_h, γ'_h est le potentiel en P_h dû à tous les corps désignés avec un indice différent de h, etc.

Donc nous aurons

$$\gamma'_h = \sum_{0}^{n-1}{}'^{(n)}_{\nu} \frac{l}{r(P_\nu, P_h)}, \tag{V.34}$$

où la notation $'^{(h)}$ adoptée dans la somme exprime que la valeur h pour l'indice variable ν est interdite.

Si l'on a besoin de fixer en particulier un point P intérieur à C_h, on écrira naturellement

$$\sum_{0}^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu} \frac{l_\nu}{r(P_\nu, P)}, \tag{V.34'}$$

la valeur *numérique* étant, bien entendu, encore γ'_h, dans l'ordre d'approximation adopté.

D'après les considérations précédentes, nous pouvons regarder constante l'intégrale

$$\gamma'_h = \frac{f}{c^2} \int_{C_h} \frac{\mu(Q)}{r(Q, P)} dG_h = \varpi_h, \tag{V.25}$$

qui donne le potentiel du corps C_h en un point quelconque P du corps lui-même, parce qu'il nous intéresse de considérer justement la valeur de γ''_h en P_h et nous savons que les dérivées de γ''_h en P_h sont nulles.

Il va sans dire que ϖ_h, comme d'ailleurs le potentiel adimensionnel γ en n'importe quel point, est une quantité du premier ordre [1].

2. Calcul des potentiels φ_h. Quantités assimilables à des constantes. — On a d'abord

$$\varphi_h = \varphi'_h + \varphi''_h, \tag{V.26}$$

où

$$\varphi'_h = -\frac{f}{c^2} \int_{S'} \frac{\mu\gamma}{r(Q, P)} dS', \tag{V.27}$$

---

(1) On a

$$\varpi_h = \frac{f}{c^2} \int_{C_h} \frac{\mu \, dC_h}{r(Q, P_h)} \leqq \frac{f}{c^2} \bar{\mu} . 4\pi \int_0^{\bar{r}} \rho \, d\rho = \frac{f}{c^2} 2\pi \bar{r}^2 \bar{\mu} = \frac{3}{2} \frac{f\bar{m}}{c^2} \frac{1}{\bar{r}} = \frac{\bar{l}}{\bar{r}},$$

où $\bar{\mu}$ est une limite supérieure de μ à l'intérieure de C_h, $\bar{r}$ est la distance maximum du centre de gravité P_h à la surface du corps C_h, $\bar{m}$ est la masse renfermée dans une sphère homogène de densité $\bar{\mu}$ et rayon $\bar{r}$, $\bar{l}$ le rayon gravitationnel correspondant.

si Q désigne un point d'intégration appartenant à S' et P un point paramétrique quelconque de C_h, en particulier P_h. Mais, si S' est l'ensemble des corps C_ν, sauf C_h, on a, à fort peu près, d'après l'hypothèse III

$$
\begin{aligned}
(\text{V.28})\quad \varphi'_h &= -\frac{f}{c^2}\sum_{\nu=0}^{n-1}{}'^{(h)}\frac{1}{r(P_\nu, P)}\int_{C_\nu}\mu(Q)\gamma_\nu(Q)\,dC_\nu \\
&= -\frac{f}{c^2}\sum_{\nu=0}^{n-1}{}'^{(h)}\frac{1}{r(P_\nu, P)}\left[\int_{C_\nu}\mu(Q)\gamma'_\nu(Q)\,dC_\nu+\int_{C_\nu}\mu(Q)\gamma''_\nu(Q)\,dC_\nu\right] \\
&= -\frac{f}{c^2}\sum_{\nu=0}^{n-1}{}'^{(h)}\frac{1}{r(P_\nu, P)}\sum_{\rho=0}^{n-1}{}'^{(\nu)}\frac{l_\rho m_\nu}{r(P_\nu, P_\rho)} \\
&\quad -\left(\frac{f}{c^2}\right)^2\sum_{\nu=0}^{n-1}{}'^{(h)}\frac{1}{r(P_\nu, P)}\int_{C_\nu}\mu(Q)\,dC_\nu\int_{C_\nu}\frac{\mu(Q')\,dC_\nu}{r(Q', Q)} \\
&= -\sum_{\nu=0}^{n-1}{}'^{(h)}\frac{l_\nu}{r(P_\nu, P)}\sum_{\rho=0}^{n-1}{}'^{(\nu)}\frac{l_\rho}{r(P_\nu, P_\rho)}-\sum_{\nu=0}^{n-1}{}'^{(h)}\frac{l_\nu\chi_\nu}{r(P_\nu, P)},
\end{aligned}
$$

ayant posé

$$(\text{V.29})\qquad l_\nu\chi_\nu=\left(\frac{f}{c^2}\right)^2\int_{C_\nu}\mu(Q)\,dC_\nu\int\frac{\mu(Q')\,dC_\nu}{r(Q', Q)}.$$

Il nous convient d'écrire

$$(\text{V.30})\qquad \varphi'_h=\varphi'^{*}_h-\sum_{\nu=0}^{n-1}{}'^{(h)}\frac{l_\nu\chi_\nu}{r(P_\nu, P)},$$

où

$$(\text{V.31})\qquad \varphi'^{*}_h=-\sum_{\nu=0}^{n-1}{}'^{(n)}\frac{l_\nu}{r(P_\nu, P)}\sum_{\rho=0}^{n-1}{}'^{(\nu)}\frac{l_\rho}{r(P_\nu, P_\rho)}.$$

Portons maintenant notre attention sur

$$
\begin{aligned}
(\text{V.32})\quad \varphi''_h &= -\frac{f}{c^2}\int_{C_h}\frac{\mu(\gamma'_h+\gamma''_h)}{r(Q, P)}\,dC_h \\
&= -\frac{f}{c^2}\int_{C_h}\frac{\mu}{r(Q, P)}\sum_{\nu=0}^{n-1}{}'^{(h)}\frac{l_\nu}{r(P_\nu, P)}\,dC_\nu-\frac{f}{c^2}\int_{C_h}\frac{\mu\gamma''_h}{r(Q, P)}\,dC_n \\
&= -\sum_{\nu=0}^{n-1}{}'^{(h)}\frac{l_\nu}{r(P_\nu, P)}\int_{C_h}\frac{\mu\,dC_h}{r(Q, P)}-\frac{f}{c^2}\int_{C_h}\frac{\mu\gamma''_h}{r(Q, P)}\,dC_h,
\end{aligned}
$$

L'intégrale

$$\int_{C_h}\frac{\mu\,dC_h}{r(Q, P)}$$

doit être calculée en P_h, donc elle est assimilable à la constante ϖ_h et la première somme se réduit à

$$-\varpi_h \sum_{0}^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu} \frac{l_\nu}{r(P_\nu, P)}.$$

Pour ce qui concerne le second terme

$$-\frac{f}{c^2}\int_{C_h} \frac{\mu \gamma''_h}{r(Q, P)} dC_h,$$

nous remarquons que :

le corps C_h est symétrique par rapport à son centre de gravité P_h, donc

$$\mu(Q) = \mu(Q'),$$

si Q, Q' sont symétriques par rapport à P_h, ce qui comporte que

$$\gamma''(Q) = \gamma''(Q').$$

Donc

$$(\mu\gamma''_h)_Q = (\gamma\mu''_h)_{Q'}.$$

Il s'ensuit que la quantité considérée a ses dérivées nulles en P_h et peut être assimilée à une nouvelle constante ϖ'_h du corps C_h, additive, donc négligeable.

Nous avons en définitive

$$\varphi''_h = -\varpi_h \sum_{0}^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu} \frac{l_\nu}{r(P_\nu, P)} \tag{V.33}$$

et

$$\varphi_h = \varphi'^{*}_h + \varphi''^{*}_h, \tag{V.34}$$

ayant posé

$$\varphi''^{*}_h = -\sum_{0}^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu} \frac{l_\nu(\chi_\nu + \varpi_h)}{r(P_\nu, P)}. \tag{V.35}$$

3. Calcul des termes ψ'_h, v'_h, γ_i. — On a évidemment

$$\psi'_h = \frac{3}{2}\sum_{0}^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu} \frac{l_\nu \beta^2_\nu}{r(P_\nu, P_h)} \tag{V.36}$$

et

$$(V.37) \qquad \nu'_h = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} \sum_{0}^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu} l_\nu r P_\nu, P_h).$$

On applique ici la remarque que la valeur de l'intégrale

$$(V.38) \qquad \int_D \mu \, r \, dC$$

en un point P très éloigné se réduit à fort peu près, c'est-à-dire à des termes de l'ordre $\left(\frac{d}{r}\right)^2$ près, au produit de la masse de C par la distance de P au centre de gravité de C : comme il arrive pour l'attraction.

L'expression des quantités γ_i est

$$(V.39) \qquad \gamma_{h|i} = \gamma'_{h|i} + \gamma''_{h|i},$$

où

$$(V.40) \qquad \begin{cases} \gamma'_{h|i} = \displaystyle\sum_{0}^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu} \frac{l_\nu \beta_{\nu|i}}{r(P_\nu, P)}, \\ \gamma''_{h|i} = \varpi_h \beta_{h|i}. \end{cases}$$

4. **Coefficients massiques (masses relatives).** — Dans la suite nous trouverons convenable d'introduire les rapports (fractions propres)

$$(V.41) \qquad \lambda_\nu = \frac{m_\nu}{m} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1),$$

tels que

$$(V.42) \qquad \sum_{0}^{n-1}{}_{\nu} \mu_\nu = 1.$$

Alors, si l est le rayon gravitationnel de la masse totale

$$(V.43) \qquad l = \frac{fm}{c^2},$$

on a

$$(V.44) \qquad l_\nu = \lambda_\nu l \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

5. **Les trois termes de la fonction de Lagrange $\mathcal{L}_h$: $\mathcal{N}_h$ (newtonien), $\mathcal{D}''_h$ (perturbation einsteinienne ponctuelle), $\mathcal{D}''_h$ (perturbation einsteinienne due à l'extension).** — Les développements précédents

suffisent pour écrire les expressions explicites des fonctions $\mathcal{D}'_h$, $\mathcal{D}''_h$. Les voici :

$$(\text{V}.45)\quad \mathcal{D}'_h = \frac{1}{2}\mathcal{N}'^2_h - \gamma'^2_h + \gamma'_h\beta^2_h + l\sum_{\nu\,0}^{n-1}{}'^{(h)}\frac{\lambda_\nu}{r(\mathrm{P}_\nu,\mathrm{P}_h)}\left[\frac{3}{2}\beta^2_h - \gamma'_\nu - 4\underline{\beta}_h\times\underline{\beta}_\nu\right]$$

$$+\frac{1}{2}l\frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}}\sum_{\nu\,0}^{n-1}{}'^{(h)}\lambda_\nu r(\mathrm{P}_\nu,\mathrm{P}_h).$$

Pour ce qui concerne $\mathcal{D}'''_h$, observons que

$$(\text{V}.46)\qquad \zeta''_h = \varphi''^{\star}_h + \psi''_h.$$

Mais (V.12)

$$\mathcal{D}''_h = \mathcal{N}'_h\varpi_h - 2\varpi_h\gamma'_h + \zeta''_h + \varpi_h\beta^2_h - 4\sum_{i\,3}^{1}\gamma''_{h|i}\beta_{h|i},$$

donc, en y substituant les expressions calculées de $\varphi''^{\star}_h$, ψ''_h, $\gamma''_{h|i}$ [(V.35) et (V.40)], on a

$$(\text{V}.47)\qquad \mathcal{D}''_h = \varpi_h\left(\frac{1}{2}\beta^2_h + \gamma'_h\right) - 2\varpi_h\gamma'_h + \varpi_h\beta^2_h - 4\varpi_h\beta^2_h$$

$$+\frac{3}{2}\varpi_h\beta^2_h - l\sum_{\nu\,0}^{n-1}{}'^{(n)}\frac{\lambda_\nu(\chi_\nu + \varpi_h)}{r(\mathrm{P}_\nu,\mathrm{P})}$$

$$= -\varpi_h\beta^2_h - l\sum_{\nu\,0}^{n-1}{}'^{(h)}\frac{\lambda_\nu(\chi_\nu + 2\varpi_h)}{r(\mathrm{P}_\nu,\mathrm{P})}.$$

La fonction lagrangienne $\mathcal{L}_h$ du problème des n corps est donc

$$(\text{V}.48)\qquad \mathcal{L}_h = \mathcal{N}_h + \mathcal{D}'_h + \mathcal{D}''_h,$$

où

$$\mathcal{N}_h = \frac{1}{2}\beta^2_h + \gamma'_h$$

est le terme newtonien;

$$(\text{V}.49)\qquad \mathcal{D}'_h = \frac{1}{2}\mathcal{N}'^2_h - \gamma'^2_h + \zeta'_h + \gamma'_h\beta^2_h - 4\sum_{i\,1}^{3}\gamma'_{h|i}\beta_{h|i}$$

est le terme correctif einsteinien pour les masses réduites à des points,

qui remonte substantiellement à M. Droste et à de Sitter (*voir* Préface); rappelons que

$$(V.50)\quad \left\{\begin{aligned} \zeta'_h &= \varphi'_h + \psi'_h + \upsilon'_h,\\ \varphi'^{*}_h &= -l^2 \sum_0^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu} \frac{\lambda_\nu}{r(P_\nu, P)} \sum_0^{n-1}{}'^{(\nu)}_{\rho} \frac{\lambda_\rho}{r(P_\nu, P_\rho)},\\ \psi'_h &= \frac{3}{2} l \sum_0^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu} \frac{\lambda_\nu \beta_\nu^2}{r(P_\nu, P)},\\ \upsilon'_h &= \frac{1}{2} l \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} \sum_0^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu} \lambda_\nu r(P_\nu, P),\\ \gamma'_{h\,|\,i} &= l \sum_0^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu} \frac{\lambda_\nu \beta_{\nu\,|\,i}}{r(P_\nu, P)}; \end{aligned}\right.$$

enfin

$$\mathcal{O}''_h = -\varpi_h \beta_h^2 - l \sum_0^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu} \frac{\lambda_\nu(\chi_\nu + 2\varpi_h)}{r(P_\nu, P_h)}$$

est le terme correctif dû à l'extension des corps.

6. Constantes figurant dans les équations différentielles. — Dans les trois termes de la fonction lagrangienne explicitée tout à l'heure figurent, en surplus des coefficients massiques λ_h, $2n$ paramètres ϖ_h, χ_h gravitationnels dont chacun dépend de la structure matérielle du corps C_h et qui, d'après nos hypothèses, se comportent comme des constantes pendant le mouvement.

Ces paramètres interviennent toutefois seulement dans les termes $\mathcal{O}''_h$ qui proviennent de la correction einsteinienne due à l'extension.

En outre il est possible de faire disparaître dans notre approximation tous ces paramètres par un artifice (*cf.* Chap. VI, § 1, n° 2) convenable combiné avec une petite modification des coefficients λ, c'est-à-dire par une petite altération des constantes qui caractérisent les masses.

7. Précautions à observer dans la construction des équations différentielles. — La fonction lagrangienne $\mathcal{L}_h$ se rapporte aux coor-

données x^i du point P et aux composantes $\beta_{h|i}$ de sa vitesse en prenant garde qu'après la dérivation, les coordonnées x^i doivent être remplacées par les coordonnées x^i_h du centre de gravité du corps C_h.

Le point P_h lui-même et tous les autres $P_\nu (\nu \neq h)$, aussi bien que les composantes $\beta_{\nu|i}$ de leurs vitesses, seront des paramètres lorsqu'on applique la dérivation par rapport aux x^i.

Une remarque particulière s'impose à propos de la dérivation par rapport à x^0, qui intervient dans l'expression de υ'_h. Cette dérivée partielle est indépendante des coordonnées $x^i (i = 1, 2, 3)$ du point P, tandis qu'elle porte sur la variabilité par rapport au temps de la fonction, à cause du mouvement des autres points (paramétriques) $P_\nu (\nu \neq h)$.

C'est pourquoi nous désignerons spécifiquement l'opération $\frac{\partial}{\partial x^0}$ par la notation

$$\frac{\partial'^{(h)}}{\partial' x^0},$$

écrivant en conformité

$$\upsilon'_h = \frac{1}{2} l \frac{\partial'^{(h)}}{\partial' x^0} \sum_{\nu=0}^{n-1}{}'^{(h)} \lambda_\nu r(P_\nu, P). \tag{V.51}$$

CHAPITRE VI.

LE PROBLÈME DES DEUX CORPS. EXTENSION DU PRINCIPE D'EFFACEMENT AU CAS GÉNÉRAL DE n CORPS.

1. La fonction de Lagrange du mouvement absolu de chacun des deux corps.

1. Notations se rattachant au possible à l'usage classique. — Nous nous proposons d'appliquer la théorie générale développée dans le Chapitre V au cas particulièrement important de deux corps célestes.

Les conclusions auxquelles nous aboutissons sont valables non seulement dans les cas classiques Soleil-Planète ou Planète-Satellite, mais aussi bien pour les étoiles doubles, dont l'Astronomie a pu, dans plusieurs centaines de cas, déterminer les orbites, soit par des observations directes, soit par des méthodes spectroscopiques (1).

(1) *Cf.* C. Armellini, *Trattato di Astronomia siderale*, vol. II, Bologna, Zanichelli, 1931.

Nous désignerons par l'indice h toutes les quantités (scalaires ou vectorielles) se rapportant à un des deux corps et par l'indice h_{+1} celles qui se rapportent à l'autre, en regardant naturellement identifiables les indices de même parité o, 2 ; 1, 3. Il s'ensuit que les sommes du Chapitre V (§ 5) :

$$\sum_{0}^{n-1}{}'^{(h)}_{\nu}, \quad \sum_{0}^{n-1}{}'^{(\nu)}_{\rho},$$

se réduisent à un seul terme qui porte l'indice $h+1$, $\nu+1$, ... Nous avons de la sorte

(VI.1) $$\gamma'_h = \frac{l\lambda_{h+1}}{r(P_{h+1}, P)},$$

(VI.2) $$\varphi'^{*}_h = -l^2\frac{\lambda_{h+1}}{r(P_{h+1}, P)}\frac{\lambda_h}{r(P_{h+1}, P_h)}.$$

Pour former les équations du mouvement du point P_h, centre de gravité de C_h, nous devons dériver la fonction φ'^{*}_h par rapport aux coordonnées du point P, en y posant après dérivation $P \equiv P_h$, tandis que la distance $r(P_{h+1}, P_h)$ doit être considérée comme une constante.

Pour éviter toute confusion, nous introduisons pour la distance $P_h P_{h+1}$ les deux notations r et r^*, avec la convention que r^* ne doit pas être dérivée et $r \equiv r(P_{h+1}, P_h)$ peut remplacer ce que nous avons désigné jusqu'ici par $r(P_{h+1}, P)$, aussi lorsqu'il s'agit de dériver et substituer ensuite P_h à P.

Nous posons donc

(VI.2′) $$\varphi'^{*}_h = -l^2\frac{\lambda_{h+1}}{r}\frac{\lambda_h}{r^*}$$

et

(VI.1) $$\gamma'_h = \frac{l\lambda_{h+1}}{r}.$$

On a encore

(VI.3) $$\psi'_h = \frac{3}{2}l\frac{\lambda_{h+1}\beta^2_{h+1}}{r},$$

(VI.4) $$\upsilon'_h = \frac{1}{2}l\lambda_{h+1}\frac{\partial'^{(h)2}r}{\partial' x^{0^2}},$$

(VI.5) $$\gamma'_{h|i} = \frac{l\lambda_{h+1}\beta_{h+1|i}}{r}.$$

Écrivons maintenant l'expression des fonctions

$$\mathcal{N}_h = \mathcal{N}'_h, \quad \mathcal{O}'_h, \quad \mathcal{O}''_h$$

dans le cas des deux corps.

On a

$$\text{(VI.6)} \qquad \mathcal{N}_h = \mathcal{N}'_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \frac{l\lambda_{h+1}}{r}$$

$$\text{(VI.7)} \quad \mathcal{O}'_h = \frac{1}{2}\mathcal{N}'^2_h - \gamma'^2_h - l^2\frac{\lambda_h\lambda_{h+1}}{r^\star r}$$

$$+\frac{3}{2}\frac{l\lambda_{h+1}\beta_{h+1}^2}{r} + \frac{1}{2}l\lambda_{h+1}\frac{\partial'^{(h)2} r}{\partial' x^{0^2}} + \gamma'_h\beta_h^2 - 4\frac{l\lambda_{h+1}}{r}\sum_{1}^{3}{}_i\,\beta_{h|i}\beta_{h+1|i},$$

où, répétons-le, r remplace $r(\mathrm{P}_{h+1}, \mathrm{P}_h)$, tandis que $r^\star$ a la même valeur, mais ne doit pas être dérivée par rapport aux coordonnées de P_h.

L'expression de $\mathcal{O}''_h$ est

$$\text{(VI.8)} \qquad \mathcal{O}''_h = -\varpi_h\beta_h^2 - \frac{l\lambda_{h+1}(\chi_{h+1} + 2\varpi_h)}{r}.$$

2. Simplifications admises par notre approximation. Artifice faisant ressortir le pricipe d'effacement. — On peut simplifier la fonction de Lagrange par l'artifice suivant, comme il a été annoncé au n° 6 du paragraphe 4 (Chap. V) pour n quelconque.

Introduisons une constante σ_h (du premier ordre) *a priori* indéterminée et considérons la fonction

$$\text{(VI.9)} \qquad (1 + \sigma_h)\mathcal{L}_h,$$

qui, en négligeant les termes $\sigma_h\mathcal{O}'_h$ et $\sigma_h\mathcal{O}''_h$ (qui seraient du troisième ordre au moins) se réduit à

$$(1 + \sigma_h)\mathcal{N}'_h + \mathcal{O}'_h + \mathcal{O}''_h$$

et qui donne lieu aux mêmes équations que celles englobées dans la formule variationnelle

$$\delta\int \mathcal{L}_h\, dt = 0.$$

Nous pourrons profiter de l'indétermination de σ_h pour simplifier la forme de la fonction, en modifiant quelque peu les deux cons-

tantes λ_h, ce qui permet de faire disparaître les quatre constantes ϖ_h, χ_h des équations différentielles.

On a, en effet, en négligeant pour le moment $\mathcal{D}'_h$,

(VI.10) $$(1+\sigma_h)\mathfrak{N}'_h + \mathcal{D}''_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \frac{l\lambda_{h+1}}{r}[1+\sigma_h - (\chi_{h+1}+2\varpi_h)] + \frac{1}{2}\sigma_h - \varpi_h)\beta_h^2.$$

Donc, il suffit de choisir

(VI.11) $$\sigma_h = 2\varpi_h$$

et de poser

(VI.12) $$\lambda'_h = \lambda_h(1-\chi_h) \qquad (h = 0, 1),$$

ce qui correspond à une autre petite altération des masses, pour avoir cette première partie des fonctions lagrangiennes sous la forme

(VI.13) $$\frac{1}{2}\beta_h^2 + \frac{l\lambda'_{h+1}}{r}.$$

A la vérité dans l'expression de $\mathcal{D}'_h$ interviennent encore les anciens coefficients massiques λ, mais puisque les termes de $\mathcal{D}'_h$ sont tous d'ordre supérieur, on y peut tranquillement remplacer les λ par les correspondants λ' introduits tout à l'heure par (VI.12).

En définitive, écrivant de nouveau λ (coefficient constant qui joue le rôle de masse) au lieu de λ', on est conduit, pour définir le mouvement du point P_h, à la fonction de Lagrange

(VI.14) $$\mathcal{L}_h = \mathfrak{N}_h + \mathcal{D}_h,$$

où

(VI.15) $$\mathfrak{N}_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \frac{l\lambda_{h+1}}{r}$$

et

(VI.16) $$\mathcal{D}_h = \frac{1}{2}\mathfrak{N}_h^2 - \gamma_h^2 - \gamma_h\gamma^*_{h+1} + \mathcal{D}_h^{(1)} + \mathcal{D}_h^{(2)},$$

ayant posé

$$\gamma_h = \frac{l\lambda_{h+1}}{r}, \qquad \gamma^*_h = \frac{l\lambda_{h+1}}{r^*},$$

(VI.17) $$\begin{cases} \mathcal{D}_h^{(1)} = \gamma_h\left(\beta_h^2 - 4\underline{\beta}_h\times\underline{\beta}_{h+1} + \frac{3}{2}\beta_{h+1}^2\right), \\ \mathcal{D}_h^{(2)} = \frac{1}{2}l\lambda_{h+1}\frac{\partial'^{(h)2}r}{\partial' x^{0 2}}. \end{cases}$$

Il importe de remarquer qu'à la suite des transformations développées tout à l'heure, les termes $\mathcal{Q}''_h$, qui dépendaient en surplus des quatre constantes gravitationnelles ϖ_h, χ_h, ont complètement disparu. De la sorte on a bien réalisé l'effacement de tout ce qui dépendait encore, dans les équations différentielles, de l'extension des corps, en les assimilant à cet égard à des simples points matériels.

2. Mouvement relatif.

1. Formules se rapportant au problème des deux corps en Mécanique classique comme préparation au traitement relativistique. — En ayant en vue le premier membre d'une des équations du second ordre définissant ensemble le mouvement absolu des deux corps, et leur intégration, remarquons d'abord que dans le calcul des binômes lagrangiens classiques

$$\text{(VI.18)} \qquad B_{h|i} = \frac{d}{dx^0}\frac{\partial}{\partial\beta_{h|i}} - \frac{\partial}{\partial x^i_h} \qquad (h = 0, 1;\ i = 1, 2, 3),$$

il convient d'introduire, après les dérivations, les coordonnées relatives d'un des deux corps, disons P_1, par rapport à l'autre P_0, c'est-à-dire les différences

$$\text{(VI.19)} \quad x^i = x^i_1 - x^i_0 = (-1)^h(x^i_{h+1} - x^i_h) = (-1)^{h+1}(x^i_h - x^i_{h+1}),$$

et les composantes de la vitesse absolue en fonction de celles de la vitesse relative $\underline{\beta}$ correspondante.

Il suffit pour cela de s'appuyer sur la définition de la vitesse relative

$$\text{(VI.20)} \quad \underline{\beta} = \underline{\beta}_1 - \underline{\beta}_0 = (-1)^h(\underline{\beta}_{h+1} - \underline{\beta}_h) = (-1)^{h+1}(\underline{\beta}_h - \underline{\beta}_{h+1}).$$

Il est essentiel de remarquer que, dès qu'il s'agit de termes d'ordre supérieur, il est loisible d'associer à (VI.20) la simplification classique concernant l'immobilité du centre de gravité.

A ce propos, il convient de se rattacher aux réflexions suivantes.

L'espace-temps qui est à la base de notre théorie est peu différent d'un espace pseudo-euclidien ou d'Einstein-Minkowski. Dès lors, nous pouvons encore choisir cet espace, pour lequel la partie principale du ds^2 est ds^2_0, de manière que l'origine soit le centre de gravité

des deux points P_0, P_1, dont la vitesse est constante et peut être supposée nulle dans l'approximation newtonienne.

Nous avons donc en première approximation

$$\text{(VI.21)} \qquad \lambda_h \underline{\beta}_h + \lambda_{h+1} \underline{\beta}_{h+1} = 0.$$

Cette équation permet d'exprimer les vitesses absolues en fonction de $\underline{\beta}$. On a par combinaison avec la relation (VI.20)

$$\text{(VI.22)} \qquad \begin{cases} \underline{\beta}_h = (-1)^{h+1} \lambda_{h+1} \underline{\beta} + \textcircled{2}, \\ \underline{\beta}_{h+1} = (-1)^h \lambda_h \underline{\beta} + \textcircled{2}. \end{cases}$$

Ces expressions approchées des vitesses absolues peuvent évidemment suffire dans les calculs des termes d'ordre supérieur au premier.

De même, dans le calcul de la correction einsteinienne d'un mouvement képlérien [1], toute autre quantité pourra également y être remplacée par la détermination qui lui appartient dans le mouvement képlérien.

Pour la commodité du lecteur nous reproduisons ci-dessous quelques formules classiques s'y rapportant, en employant les notations actuelles.

Dans les calculs qui vont suivre on pourra se borner à citer les numéros des formules du tableau

$$\text{(VI.23)} \qquad \dot{\beta}_i = \frac{\partial \frac{l}{r}}{\partial x^i} \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad \text{(équations du mouvement)},$$

$$\text{(VI.24)} \qquad \frac{1}{2}\beta^2 - \gamma = e \qquad \text{(intégrale des forces vives)},$$

$$\text{(VI.25)} \qquad r^2\dot{\theta} = \frac{C}{c} \qquad \text{(intégrale des aires dans le plan de l'orbite relative)},$$

on désigne par

$$\text{(VI.26)} \qquad e = \frac{E}{c^2}$$

la constante de l'énergie E divisée par c^2 et par C la constante des aires; la dérivation par rapport à x^0 est désignée par le point. En surplus, θ désigne l'anomalie vraie dans le plan de l'orbite relative.

---

(1) On veut dire, à partir de conditions initiales qui donneraient lieu dans la théorie ordinaire à un mouvement rigoureusement képlérien.

La constante $\frac{C}{c}$ est une longueur. Pour ce qui concerne son ordre de grandeur, remarquons que dans les mouvements planétaires envisagés, $r\dot{\theta}$ est la vitesse de circulation divisée par c, donc de l'ordre de β, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$ et que partout $r^2\dot{\theta}$ est le produit d'une longueur (de l'ordre de grandeur des distances planétaires) par un nombre pur d'ordre $\frac{1}{2}$.

En rappelant que

$$l = \frac{fm}{c^2}$$

est une longueur, il convient d'introduire une nouvelle constante numérique, d'ordre $\frac{1}{2}$, a, liée à C par la relation

$$\frac{l}{a} = \frac{C}{c}. \tag{VI.27}$$

Alors l'intégrale des aires est

$$r^2\dot{\theta} = \frac{l}{a}. \tag{VI.25'}$$

La quantité

$$a = \frac{\frac{l}{r}}{r\dot{\theta}} \tag{VI.27'}$$

est de l'ordre $\frac{1}{2}$, parce que $\frac{l}{r}$ est du premier ordre.

2. **Passage au mouvement relatif.** — Ceci posé, faisons remarquer que l'application formelle des opérateurs $B_{h|i}(h = 0, 1;\ i = 1, 2, 3)$ aux fonctions lagrangiennes des deux corps qu'on a désormais complètement explicitées, nous conduirait aux six équations différentielles du second ordre de leur mouvement absolu.

En ayant en vue le mouvement relatif, il suffit en concept de se procurer trois équations du second ordre ayant pour ses inconnues les coordonnées relatives (VI.19)

$$x^i = x_1^i - x_0^i.$$

Il serait évidemment désirable d'éviter d'expliciter pour cela préalablement les six équations susdites, — et de former directement une

unique fonction lagrangienne contenant exclusivement les éléments du mouvement relatif, mais nous n'avons pas réussi à réaliser synthétiquement ce calcul.

Faute de mieux, nous nous sommes résigné à calculer successivement les différents termes des équations du mouvement absolu en nous bornant à y faire paraître au lieu des $B_{h|i}$ les opérateurs B_i où figurent seulement, dans les termes d'ordre supérieur, coordonnées et vitesses relatives. On peut de la sorte tirer dans l'approximation convenue, des six équations d'où l'on part, six combinaisons dont trois découlent d'une fonction lagrangienne $\mathcal{L}$ portant exclusivement sur le mouvement relatif et les autres définissant le mouvement absolu du centre de gravité.

3. Application de l'opérateur $B_{h|i}$ à $\mathfrak{N}_h$. — On a rigoureusement

$$B_{h|i}\mathfrak{N}_h = \beta_{h|i} + l\lambda_{h+1}\frac{\partial \frac{l}{r}}{\partial x_h^i}.$$

Donc, en tenant compte des valeurs approchées (VI.22)

$$B_{h|i}\mathfrak{N}_h = (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}\left(\beta_i + l\frac{\partial \frac{l}{r}}{\partial x^i}\right) + \textcircled{2}.$$

Naturellement, dans les termes de $\mathcal{D}_h$ où $B_{h|i}\mathfrak{N}_h$ est multiplié par une quantité du premier ordre, on peut négliger les termes $\textcircled{2}$.

C'est le moment de faire apparaître (bien entendu avec les notations actuelles) la fonction lagrangienne classique du mouvement relatif newtonien

(VI.28) $$\mathfrak{N} = \frac{1}{2}\beta^2 + \gamma,$$

où

(VI.29) $$\gamma = \gamma_h + \gamma_{h+1} = \frac{l}{r}.$$

On a alors

(VI.30) $$B_{h|i}\mathfrak{N}_h = (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}B_i\mathfrak{N},$$

en désignant par B_i l'opérateur

(VI.31) $$B_i = \frac{d}{dx^0}\frac{\partial}{\partial\beta_i} - \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

4. Application de l'opérateur $B_{h|i}$ à $\frac{1}{2}\mathfrak{M}_h^2$. — On a

$$B_{h|i}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{M}_h^2\right) = \frac{d}{dx^0}\frac{\partial}{\partial\beta_{h|i}}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{M}_h^2\right) - \frac{\partial}{\partial x_h^i}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{M}_h^2\right)$$
$$= \frac{d}{dx^0}\left(\mathfrak{M}_h\frac{\partial\mathfrak{M}_h}{\partial\beta_{h|i}}\right) - \mathfrak{M}_h\frac{\partial\mathfrak{M}_h}{\partial x_h^i} = \mathfrak{M}_h B_{h|i}\mathfrak{M}_h + \beta_{h|i}\dot{\mathfrak{M}}_h.$$

Mais

$$B_{h|i}\mathfrak{M}_h = (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}\left[\frac{d}{dx^0}\left(\frac{1}{2}\beta^2+\gamma\right) - \frac{\partial\gamma}{\partial x^i}\right]$$

et

$$\dot{\mathfrak{M}}_h = \frac{d}{dx^0}\left(\frac{1}{2}\lambda_{h+1}^2\beta^2 + \lambda_{h+1}\gamma\right),$$

donc, à des termes d'ordre supérieur près, on a

$$\beta_{h|i}\dot{\mathfrak{M}}_h = (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}\beta_i\frac{d}{dx^0}\left(\frac{1}{2}\lambda_{h+1}^2\beta^2 + \lambda_{h+1}\gamma\right).$$

En remarquant que le terme

$$\mathfrak{M}_h B_{h|i}\mathfrak{M}_h$$

est négligeable parce qu'il est d'ordre supérieur à 2 et en tenant compte de l'intégrale des forces vives (VI.24), on a

$$(\text{VI.32})\quad B_{h|i}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{M}_h^2\right) = (-1)^{h+1}(\lambda_{h+1}^2 + \lambda_{h+1}^3)\beta_i\dot{\gamma}$$
$$= (-1)^{h+1}(\lambda_{h+1}^2 + \lambda_{h+1}^3)\{(\beta_i\gamma)^{\cdot} - \dot{\beta}_i\gamma\}$$
$$= (-1)^{h+1}(\lambda_{h+1}^2 + \lambda_{h+1}^3)\left\{B_i\left(\frac{1}{2}\beta^2\gamma\right) + \frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial\gamma}{\partial x^i} - \gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}\right\}$$
$$= (-1)^{h+1}(\lambda_{h+1}^2 + \lambda_{h+1}^3)B_i\left(\frac{1}{2}\beta^2\gamma - e\gamma\right).$$

5. Application de l'opérateur $B_{h|i}$ à $-\gamma_h^2 - \gamma_h\gamma_{h+1}^*$. — On remarque que la fonction envisagée ne dépend pas des $\beta_{h|i}$. Donc l'opérateur se réduit à

$$-\frac{\partial}{\partial x_h^i} = -(-1)^{h+1}\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

On a

$$\text{(VI.33)}\quad \begin{aligned} B_{h|i}(-\gamma_h^2-\gamma_h\gamma_{h+1}^*) &= (-1)^{h+1}\frac{\partial}{\partial x^i}(\lambda_{h+1}^2\gamma^2+\lambda_h\lambda_{h+1}\gamma\gamma^*) \\ &= (-1)^{h+1}\left(2\lambda_{h+1}^2\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}+\lambda_h\lambda_{h+1}\gamma^*\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}\right) \\ &= (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}(2\lambda_{h+1}+\lambda_h)\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x^i} \\ &= (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}(\lambda_{h+1}+1)\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x^i} \\ &= (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}(\lambda_{h+1}+1)B_i\left(-\frac{1}{2}\gamma^2\right). \end{aligned}$$

Pour entendre les passages de ce calcul, il faut rappeler la remarque concernant r^* (§ 1, n° 1).

6. Application de l'opérateur $B_{h|i}$ à $\mathcal{O}_h^{(1)}$. — On a

$$\begin{aligned} B_{h|i}\mathcal{O}_h^{(1)} &= B_{h|i}\left[\gamma_h\left(\beta_h^2-4\,\underline{\beta}_h\times\underline{\beta}_{h+1}+\frac{3}{2}\beta_{h+1}^2\right)\right] \\ &= \frac{d}{dx_0}(2\gamma_h\beta_{h|i})-4\frac{d}{dx^0}(\beta_{h+1|i}\gamma_h)-\beta_h^2\frac{\partial\gamma_h}{\partial x_h^i} \\ &\quad +4\,\beta_h\times\underline{\beta}_{h+1}\frac{\partial\gamma_h}{\partial x_h^i}-\frac{3}{2}\beta_{h+1}^2\frac{\partial\gamma_h}{\partial x_h^i} \\ &= (-1)^{h+1}2\lambda_{h+1}^2(\beta_i\gamma)^{\cdot}-(-1)^{h+1}\lambda_{h+1}^3\beta^2\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}-(-1)^h 4\lambda_h\lambda_{h+1}(\beta_i\gamma)^{\cdot} \\ &\quad -(-1)^{h+1}4\lambda_h\lambda_{h+1}^2\beta^2\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}-(-1)^{h+1}\frac{3}{2}\lambda_h^2\lambda_{h+1}\beta^2\frac{\partial\gamma}{\partial x^i} \\ &= (-1)^{h+1}2\lambda_{h+1}(\lambda_h+1)(\beta_i\gamma)^{\cdot} \\ &\quad -(-1)^{h+1}\left(\lambda_{h+1}^3+4\lambda_h\lambda_{h+1}^2+\frac{3}{2}\lambda_h^2\lambda_{h+1}\right)\beta^2\frac{\partial\gamma}{\partial x^i} \\ &= (-1)^{h+1}2\lambda_{h+1}(\lambda_{h+1})(\beta_i\gamma)^{\cdot} \\ &\quad -(-1)^{h+1}\lambda_{h+1}\left(\lambda_{h+1}^2+4\lambda_h\lambda_{h+1}+\frac{3}{2}\lambda_h^2\right)\beta^2\frac{\partial\gamma}{\partial x^i} \\ &= (-1)^{h+1}2\lambda_{h+1}(\lambda_{h+1})\left\{B_i\left(\frac{1}{2}\beta^2\gamma\right)+\frac{1}{2}\beta^2\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}\right\} \\ &\quad -(-1)^{h+1}\lambda_{h+1}\left(\lambda_{h+1}^2+4\lambda_h\lambda_{h+1}+\frac{3}{2}\lambda_h^2\right)\beta^2\frac{\partial\gamma}{\partial x^i} \\ &= (-1)^{h+1}2\lambda_{h+1}(\lambda_{h+1})B_i\left(\frac{1}{2}\beta^2\gamma\right) \\ &\quad +(-1)^{h+1}\lambda_{h+1}\left\{\lambda_{h+1}-\lambda_{h+1}^2-4\lambda_h\lambda_{h+1}-\frac{3}{2}\lambda_h^2\right\}\beta^2\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

En se souvenant que

$$\lambda_h+\lambda_{h+1}=1,$$

on a

$$1+\lambda_h-\lambda_{h+1}^2-4\lambda_h\lambda_{h+1}-\frac{3}{2}\lambda_h^2$$
$$=\lambda_h\left(3-4\lambda_{h+1}-\frac{5}{2}\lambda_h\right)=\lambda_h\left(\frac{1}{2}\lambda_h-\lambda_{h+1}\right).$$

D'autre part

$$\beta^2\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}=2\gamma\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}+2e\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}=\frac{\partial}{\partial x^i}(\gamma^2+2e\gamma)=-\mathrm{B}_i(\gamma^2+2e\gamma).$$

Donc, si l'on introduit le produit

(VI.34) $$p=\lambda_h\lambda_{h+1}$$

des rapports

$$\frac{m_0}{m_0+m_1},\quad\frac{m_1}{m_0+m_1},$$

où les m sont des constantes, à fort peu près les masses des deux corps (VI.12), on a

(VI.35) $$\mathrm{B}_{h|i}\mathcal{O}_k^{(n)}=(-1)^{h+1}(\lambda_{h+1}+p)\mathrm{B}_i(\beta^2\gamma)$$
$$+(-1)^{h+1}p\left(\lambda_{h+1}-\frac{1}{2}\lambda_h\right)\mathrm{B}_i(\gamma^2+2e\gamma).$$

7. Application de l'opérateur $\mathrm{B}_{h|i}$ à $\mathcal{O}_h^{(2)}$. — Il nous sera utile de donner d'abord une expression de $\dot r$ en fonction de γ et des constantes e et a d'intégration, déduite des intégrales des forces vives et des aires [(VI.24) et (VI.25)].

On l'obtient après coup en remarquant que

$$\beta^2=\dot r^2+r^2\dot\theta^2.$$

Donc

(VI.36) $$\dot r^2=\beta^2-r^2\dot\theta^2=\beta^2-\left(\frac{\gamma}{a}\right)^2=2e+2\gamma-\frac{\gamma^2}{a^2}.$$

Ceci posé, calculons d'abord la dérivée

$$\frac{\partial'^{(h)2}r}{\partial'x^{0^2}}.$$

On a, d'après la remarque du paragraphe 1,

$$\frac{\partial'^{(h)}r}{\partial'x^0}=\sum_{j}^{3}{}_{1}\frac{x_{h+1}^j-x_h^j}{r}\beta_{h+1}^j.$$

Donc

$$\text{(VI.37)}\qquad \frac{\partial'^{(h)2} r}{\partial' x^{0\,2}} = \sum_{j=1}^{3} \frac{x^j_{h+1} - x^j_h}{r} \dot\beta^j_{h+1} + \frac{1}{r}\beta^2_{h+1} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial'^{(h)} r}{\partial' x^0} \sum_{j=1}^{3} (x^j_{h+1} - x^j_h)\beta^j_{h+1}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{x^j_{h+1} - x^j_h}{r} \dot\beta^j_{h+1} + \frac{1}{r}\beta^2_{h+1} - \frac{1}{r} \sum_{kj=1}^{3} \frac{\partial r}{\partial x^k_{h+1}} \frac{\partial r}{\partial x^j_{h+1}} \beta^k_{h+1}\beta^j_{h+1}.$$

Maintenant nous allons appliquer l'opérateur $B_{h|i}$ à $\mathcal{D}^{(2)}_h$ en remarquant que cette fonction ne dépend pas des $\beta_{h|i}$.

D'autre part, si l'on exprime les différents termes en fonction des coordonnées et vitesse de P_1 relatives à P_0, on a

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{x^j_{h+1} - x^j_h}{r} \dot\beta_{h+1|j} = \sum_{j=1}^{3} (-1)^{h+1} \frac{x^j}{r} (-1)^h \lambda_h \dot\beta_j = -\lambda_h \sum_{j=1}^{3} \frac{x^j}{r} \dot\beta_j,$$

$$\frac{1}{r}\beta^2_{h+1} = \frac{\lambda^2_h}{r}\beta^2,$$

$$\sum_{kj=1}^{3} \frac{\partial r}{\partial x^k_{h+1}} \frac{\partial r}{\partial x^j_{h+1}} \beta^k_{h+1}\beta^j_{h+1} = \lambda^2_h \sum_{kj=1}^{3} \frac{\partial r}{\partial x^k} \frac{\partial r}{\partial x^j} \beta_k\beta_j = \lambda^2_h \beta^2_r,$$

où β_r désigne la vitesse radiale (relative) de P_1, c'est-à-dire $\dot r$.

Donc, on a

$$B_{h|i}\mathcal{D}^{(2)}_h = -\frac{1}{2} l \lambda_{h+1} \frac{\partial}{\partial x^i_h} \frac{\partial'^{(h)2} r}{\partial' x^{0\,2}}$$

$$= -(-1)^{h+1}\frac{1}{2} l \lambda_{h+1} \frac{\partial}{\partial x^i} \left\{ -\lambda_h \sum_{j=1}^{3} \frac{x^j}{r}\dot\beta_j + \frac{\lambda^2_h}{r}\beta^2 - \frac{\lambda^2_h}{r}\beta^2_r \right\}$$

$$= -(-1)^{h+1}\frac{1}{2} \lambda_{h+1} \left\{ -l\lambda_h \frac{\partial}{\partial x^i} \sum_{j=1}^{3} \dot\beta_j \frac{\partial r}{\partial x^j} + \lambda^2_h \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} - \lambda^2_h \beta^2_r \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} \right\}$$

$$= -(-1)^{h+1}\frac{1}{2} \lambda_{h+1} \left\{ -l\lambda_h \sum_{ij=1}^{3} \dot\beta_j \frac{\partial^2_r}{\partial x^i\,\partial x^j} + \lambda^2_h \beta^2 \frac{\partial \gamma}{\partial x^i} - \lambda^2_h \beta^2_r \frac{\partial x^i}{\partial \gamma} \right\}.$$

En vertu des équations (VI.23) on a

$$\sum_{1}^{3}{}_{ij}\,\beta_j \frac{\partial^2 r}{\partial x^i\,\partial x^j} = -\frac{l}{r^2}\sum_{1}^{3}{}_{ij}\frac{\partial r}{\partial x^j}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^i\,\partial x^j} = -\frac{1}{2}\,\frac{l}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\sum_{1}^{3}{}_{j}\left(\frac{\partial r}{\partial x^j}\right)^2 = 0.$$

A cause de (VI.36), on obtient donc

$$\text{(VI.38)}\quad \begin{aligned} B_{h|i}\mathcal{O}_h^{(2)} &= -(-1)^{h+1}\lambda_{h+1} \\ &\quad\times\left\{\lambda_h^2(\gamma+e)\frac{\partial\gamma}{\partial x^i} - \lambda_h^2\left(e+\gamma-\frac{\gamma^2}{2a^2}\right)\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}\right\} \\ &= -(-1)^{h+1}p\,\lambda_h\frac{1}{2a^2}\gamma^2\frac{\partial\gamma}{\partial x^i} \\ &= -(-1)^{h+1}p\,\lambda_h\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{6}\frac{\gamma^3}{a^2}\right) = (-1)^{h+1}p\,\lambda_h B_i\left(\frac{1}{6}\frac{\gamma^3}{a^2}\right). \end{aligned}$$

8. Conclusion des calculs précédents et déduction de la fonction de Lagrange régissant le mouvement relatif. — Voici en définitive le résultat de l'opérateur lagrangien appliqué à la perturbation einsteinienne $\mathcal{O}_h$ exprimé par celui de l'opérateur du mouvement relatif

$$\text{(VI.39)}\quad \begin{aligned} B_{h|i}\mathcal{O}_h &= (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}^2(\lambda_{h+1}+1)B_i\left(\frac{1}{2}\beta^2\gamma - e\gamma\right) \\ &\quad + (-1)^{h+1}\lambda_{h+1}(\lambda_{h+1}+1)B_i\left(-\frac{1}{2}\gamma^2\right) \\ &\quad + (-1)^{h+1}(\lambda_{h+1}+p)B_i(\beta^2\gamma) \\ &\quad + (-1)^{h+1}p\left(\lambda_{h+1}-\frac{1}{2}\lambda_h\right)B_i(\gamma^2+2e\gamma) \\ &\quad + (-1)^{h+1}p\,\lambda_h B_i\left(\frac{1}{6}\frac{\gamma^3}{a^2}\right). \end{aligned}$$

Maintenant, il nous sera utile de rappeler que, d'après

$$\lambda_0+\lambda_1 = 1,$$

on a

$$\lambda_0^2+\lambda_1^2 = 1-2p,\qquad \lambda_0^3+\lambda_1^3 = 1-3p,\qquad p=\lambda_0\lambda_1.$$

Pour aboutir à la fonction de Lagrange $\mathcal{L}$ du mouvement relatif nous devons calculer l'expression

$$\text{(VI.40)}\quad \begin{aligned} &(-1)^{h+1}B_{h|i}\mathcal{L}_h + (-1)^h B_{h+1|i}\mathcal{L}_{h+1} \\ &= (-1)^h\{B_{h+1|i}\mathcal{L}_{h+1} - B_{h|i}\mathcal{L}_h\} \\ &= (-1)^h\{B_{h+1|i}\mathcal{N}_{h+1} - B_{h|i}\mathcal{N}_h\} \\ &\quad + (-1)^h\left\{B_{h+1|i}\left(\frac{1}{2}\mathcal{N}_{h+1}^2\right) - B_{h|i}\left(\frac{1}{2}\mathcal{N}_h^2\right)\right\} \\ &\quad + (-1)^h\{B_{h+1|i}(-\gamma_{h+1}^2-\gamma_{h+1}\gamma_h^*) - B_{h|i}(-\gamma_h^2-\gamma_h\gamma_{h+1}^*)\} \\ &\quad + (-1)^h\{B_{h+1|i}\mathcal{O}_{h+1}^{(1)} - B_{h|i}\mathcal{O}_h^{(1)}\} \\ &\quad + (-1)^h\{B_{h+1|i}\mathcal{O}_{h+1}^{(2)} - B_{h|i}\mathcal{O}_h^{(2)}\}. \end{aligned}$$

On a

$$(-1)^h \{ B_{h+1|i}\mathfrak{N}_{h+1} - B_{h|i}\mathfrak{N}_h \} = (-1)^h \{ (-1)^h \lambda_h B_i \mathfrak{N} + (-1)^h \lambda_{h+1} B_i \mathfrak{N} \} = B_i \mathfrak{N},$$

$$(-1)^h \left\{ B_{h+1|i}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{N}^2_{h+1}\right) - B_{h|i}\left(\frac{1}{2}\mathfrak{N}^2_h\right) \right\}$$
$$= (-1)^h \left\{ (-1)^h (\lambda_h^2 + \lambda_h^3) B_i \left(\frac{1}{2}\beta^2\gamma - e\gamma\right) + (-1)^h (\lambda^2_{h+1} + \lambda^3_{h+1}) B_i \left(\frac{1}{2}\beta^2\gamma - e\gamma\right) \right\}$$
$$= \left(1 - \frac{5}{2}p\right) B_i(\beta^2\gamma - 2e\gamma),$$

$$(-1)^h \{ B_{h+1|i}(-\gamma^2_{h+1} - \gamma_{h+1}\gamma^*_h) - B_{h|i}(-\gamma^2_h - \gamma_h\gamma^*_{h+1}) \}$$
$$= (-1)^h \left\{ (-1)^h (\lambda_h + \lambda_h^2) B_i \left(-\frac{1}{2}\gamma^2\right) + (-1)^h (\lambda_{h+1} + \lambda^2_{h+1}) B_i \left(-\frac{1}{2}\gamma^2\right) \right\} = B_i[(p-1)\gamma^2],$$

$$(-1)^h \{ B_{h+1|i}\mathcal{O}^{(1)}_{h+1} - B_{h|i}\mathcal{O}^{(1)}_h \}$$
$$= (-1)^h \left\{ (-1)^h (\lambda_h + p) B_i(\beta^2\gamma) + (-1)^h p \left(\lambda_h - \frac{1}{2}\lambda_{h+1}\right) B_i(\gamma^2 + 2e\gamma) + (-1)^h (\lambda_{h+1} + p) B_i(\beta^2\gamma) + (-1)^h p \left(\lambda_{h+1} - \frac{1}{2}\lambda_h\right) B_i(\gamma^2 + 2e\gamma) \right\}$$
$$= B_i \left[(1 + 2p)\beta^2\gamma + \frac{1}{2}p(\gamma^2 + 2e\gamma) \right],$$

$$(-1)^h \left\{ B_{h+1|i}\mathcal{O}^{(2)}_{h+1} - B_{h|i}\mathcal{O}^{(2)}_h \right\}$$
$$= (-1)^h \left\{ (-1)^{h+1} p \lambda_{h+1} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{6}\frac{\gamma^3}{a^2}\right) - (-1)^h p \lambda_h \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{6}\frac{\gamma^3}{a^2}\right) \right\}$$
$$= -p \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{6}\frac{\gamma^3}{a^2}\right) = B_i\left(\frac{1}{6}p\frac{\gamma^3}{a^2}\right).$$

Les calculs précédents nous donnent la fonction de Lagrange

(VI.41) $$\mathcal{L} = \mathfrak{N} + \mathcal{O},$$

où

(VI.28) $$\mathfrak{N} = \frac{1}{2}\beta^2 + \gamma$$

et

(VI.42) $$\mathcal{O} = \frac{1}{2}(4-p)\beta^2\gamma + 6e\left(p - \frac{1}{2}\right)\gamma + \left(\frac{3}{2}p - 1\right)\gamma^2 + \frac{1}{6}\frac{p}{a^2}\gamma^3,$$

pour le mouvement du corps P_1 relatif à P_0.

Elle peut être encore écrite sous la forme

(VI.43) $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Phi\beta^2 + \psi,$$

en désignant par Φ et ψ les fonctions

$$\Phi = 1 + (4 - p)\gamma, \qquad \text{(VI'.44)}$$

$$\psi = \gamma + 6e\left(p - \frac{1}{3}\right)\gamma + \left(\frac{3}{2}p - 1\right)\gamma^2 + \frac{1}{6}\frac{p}{a^2}\gamma^3; \qquad \text{(VI.45)}$$

9. **Un théorème d'équivalence.** — Notre problème lagrangien admet l'intégrale de l'énergie

$$\frac{1}{2}\Phi\beta^2 - \psi = e, \qquad \text{(VI.46)}$$

la constante différant de celle de l'énergie dans le mouvement Képlérien approché, par une quantité d'ordre supérieur au premier (dans notre approximation il est loisible de la remplacer par cette dernière).

D'après un théorème bien connu de Mécanique analytique (¹), un faisceau de trajectoires du problème susdit des deux corps, correspondant à une valeur déterminée de la constante e est donnée par les géodésiques du

$$ds^2 = 2\Phi(\psi + e)\,dl_0^2, \qquad \text{(VI.47)}$$

en désignant par dl_0 l'élément linéaire de l'espace euclidien.

C'est aussi un faisceau de trajectoires d'énergie nulle dans un mouvement de l'espace ordinaire où le potentiel des forces serait

$$\text{F} = \Phi(\psi + e) = \left\{1 + (4 - p)\gamma\right\} \times \left[\left(e + \gamma + 6e\left(p - \frac{1}{3}\right)\gamma + \left(\frac{3}{2}p - 1\right)\gamma^2 + \frac{1}{6}\frac{p}{a^2}\gamma^3\right]\right), \qquad \text{(VI.48)}$$

égal encore, à des quantités d'ordre supérieur près, à

$$\text{F} = e + \gamma + \left(3 + \frac{1}{2}p\right)\gamma^2 + \frac{1}{6}\frac{p}{a^2}\gamma^3. \qquad \text{(VI.48')}$$

Ce problème auxiliaire admet les deux intégrales des forces vives (avec la constante nulle) et des aires qui s'écrivent

$$\beta^2 = 2\text{F}, \qquad \text{(VI.49)}$$

c'est-à-dire

$$r'^2 + r^2\theta'^2 = 2\text{F} \qquad \text{(VI.49')}$$

(¹) T. LEVI-CIVITA et V. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*, vol. II_2, Cap. X, Bologna, Zanichelli, 1927.

et

(VI.25') $$r^2\theta' = \frac{l}{a}.$$

En éliminant le temps römerien, il vient

(VI.50) $$\gamma^2 + \left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right)^2 = 2a^2\mathrm{F},$$

d'où, en définitive,

(VI.50') $$\left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right)^2 = 2a^2e + 2a^2\gamma - \gamma^2 + 2a^2\left(3 + \frac{1}{2}p\right)\gamma^2 + \frac{1}{3}p\gamma^3.$$

Cette équation se présente sous la forme

(VI.51) $$\left(\frac{d\gamma}{d\theta}\right)^2 = f(\gamma) + g(\gamma),$$

en désignant par

(VI.52) $$f(\gamma) = -\gamma^2 + 2a^2\gamma + 2a^2e$$

la fonction quadratique que l'on aurait dans le mouvement Képlérien qui est, comme on voit, du second ordre avec nos notations, et par

(VI.53) $$g(\gamma) = 2a^2\left(3 + \frac{1}{2}p\right)\gamma^2 + \frac{1}{3}p\gamma^3$$

le terme dû à la correction einsteinienne (qui est d'ordre 3). A ce point il convient d'insérer une proposition de caractère général sur le calcul des périodes.

10. Digression sur le calcul de la période d'une solution de l'équation différentielle de Weierstrass

(VI.54) $$\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 = \mathcal{F}(q).$$

Il est bien connu, d'après Weierstrass, que si la fonction $\mathcal{F}(q)$ est continue dans l'intervalle $a \leq q \leq b$, où elle est positive et s'annule simplement seulement pour $q = a$, $q = b$, $q(t)$ est une fonction périodique de t, pourvu que sa valeur initiale soit comprise entre a et b et la période est donnée par

(VI.55) $$\tau = 2\int_a^b \frac{dq}{\sqrt{\mathcal{F}(q)}}.$$

Dans le cas élémentaire

$$\mathcal{F}(q) = \omega^2(q-a)(b-q), \tag{VI.56}$$

on a, après coup, la période

$$\tau_0 = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{VI.57}$$

Or, il est intéressant pour notre but d'envisager la fonction

$$\mathcal{F}(q) = \omega^2(q-a)(b-q) + g(q) \tag{VI.58}$$

en traitant $g(q)$ comme d'ordre supérieur vis-à-vis du premier terme dans tout intervalle intérieur à a, b et, bien entendu, comme fonction continue dans un intervalle a', b' qui contient à son intérieur l'intervalle a, b.

Dans ce cas, on peut donner, d'après M. Levi-Civita [1], une expression remarquable de la période par la formule suivante :

$$\tau = \tau_0 + \frac{1}{\omega^3}\int_0^{\pi} \frac{G(q, a, b)}{\mathcal{V}(q, a, b)}\, d\theta, \tag{VI.59}$$

où les variables q et θ sont liées par la relation

$$q = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(a-b)\cos\theta \tag{VI.60}$$

et

$$G(q, a, b) = \begin{vmatrix} g(q) & q & 1 \\ g(a) & a & 1 \\ g(b) & b & 1 \end{vmatrix}, \qquad \mathcal{V}(q, a, b) = (b-a)(q-a)(b-q). \tag{VI.61}$$

Cette formule (où la fonction sous le signe a l'apparence de $\frac{0}{0}$ aux extrémités de l'intervalle d'intégration) peut être transformée [2] sous une forme plus avantageuse pour les calculs.

Précisément on a

$$\tau = \tau_0 + \frac{1}{\omega^3}\int_0^{\pi} g''(q)\sin^2\theta\, d\theta, \tag{VI.62}$$

---

[1] *Sul calcolo effettivo del periodo in un caso tipico di prima approssimazione* (*Revista de Ciencis*, 421, Lima, Perù, 1937).

[2] N. Cartovitch, *Sul calcolo effettivo del periodo del moto perturbato in un caso tipico di prima approssimazione* (*Rend. Lincei*, 1938). Une expression remarquable du reste dans ces formules a été donnée récemment par M. Sansone, *voir* sa Note.

en supposant bien entendu que $g(q)$ possède une dérivée seconde intégrable.

C'est sous cette forme que nous allons l'appliquer dans les lignes suivantes.

11. Avance du périhélie dans le cas de deux masses finies. Terme additionnel dans la formule d'Einstein pour l'avance du périhélie. — Depuis longtemps les observations avaient accusé un petit déplacement du périhélie de certaines planètes, et notamment de Mercure, dans le plan de l'orbite et dans le sens direct du mouvement, qui ne pouvait pas s'expliquer par la théorie classique des perturbations planétaires. D'après Leverrier et les évaluations successives les plus autorisées, ce déplacement résiduel, encore inconnu, pouvait être estimé de $42''$ par siècle.

Einstein a reconnu le premier que l'avance du périhélie de chaque planète autour du Soleil se présente comme une conséquence mathématique de sa nouvelle loi de gravitation et donne presque exactement pour ce déplacement la valeur observée. Mais son analyse est valable seulement dans le cas d'un corps de masse négligeable gravitant dans le champ d'un corps (sphérique) de masse finie.

Notre théorie nous conduit à un perfectionnement de ce résultat fondamental, dans l'ordre d'approximation envisagé, qui est valable pour des corps de masses comparables et partout susceptible de vérification par des observations astronomiques des étoiles doubles après un grand nombre de périodes.

Nous démontrerons que l'avance du périhélie peut s'augmenter au maximum de $1/12^e$ de la valeur donnée par Einstein.

Pour l'application que nous avons en vue de la formule (VI.62), il convient de rappeler que l'expression classique de γ en fonction de θ, c'est-à-dire dans le mouvement Képlérien est

$$\gamma = \frac{l}{r} = \frac{l}{p} + \frac{el}{p}\cos\theta, \tag{VI.63}$$

où p désigne le paramètre de l'ellipse Képlérienne et e son excentricité.

La période par rapport à l'anomalie (vraie) θ est en conformité

$$\tau_0 = 2\pi.$$

Dans ce cas de mouvement troublé, on a

$$g''(\gamma) = 4a^2\left(3 + \frac{1}{2}p\right) + 2p\gamma,$$

comme il résulte après une double dérivation de la fonction $g(\gamma)$ (VI.53).

Donc

$$g''(\gamma)\sin^2\theta = 4a^2\left(1 + \frac{1}{2}p\right)\sin^2\theta + 2p\left(\frac{l}{p} + \frac{el}{p}\cos\theta\right)\sin^2\theta.$$

Intégrant dans l'intervalle o, π et en remarquant que

$$a^2 = \frac{l}{p},$$

on trouve, par l'application de la formule (VI.62),

$$\tau = 2\pi + \sigma, \tag{VI.64}$$

$$\sigma = \sigma_e\left(1 + \frac{p}{3}\right), \tag{VI.65}$$

où l'on a désigné par

$$\sigma_e = 6\pi a^2 = 6\pi\frac{l}{p} \tag{VI.66}$$

l'avance du périhélie découverte par Einstein.

En rappelant que $p = \lambda_0\lambda_1$ et que $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$, on a que la valeur maximum de $\frac{1}{3}p$ est $\frac{1}{12}$, ce qui prouve le résultat annoncé.

12. Période apsidale et rotation sidérale. — D'après les paragraphes précédents on a (dans l'approximation adoptée) résolu le problème des deux corps en deux étapes :

1° détermination de la trajectoire;

2° loi du temps.

Le résultat de la première a conduit à reconnaître la nature spiraliforme de l'orbite assimilable à fort peu près à une ellipse lentement tournante, le caractère géométrique le plus marquant étant la petite avance du périhélie, rigoureusement constante, même en seconde approximation.

Dans cette approximation, la loi du temps peut être réduite au

calcul de la période apsidale, c'est-à-dire de l'intervalle constant de temps T qui s'écoule entre deux passages consécutifs d'un (quelconque) des corps d'un périhélie à l'autre.

Si l'on tient compte toutefois de la circonstance que la distance r des deux corps est une fonction rigoureusement périodique de l'anomalie vraie θ, ayant la période

$$\tau = 2\pi + \sigma,$$

où σ désigne l'avance du périhélie, c'est-à-dire le double de l'angle apsidal et que d'après la formule (VI.25') (intégrale des aires) θ est une fonction périodique de x^0, il y a lieu de porter l'attention sur la durée d'une révolution sidérale, c'est-à-dire sur le temps (également constant entre les limites de notre approximation) employé par le corps pour reprendre la même orientation dans l'espace.

Pour déterminer la relation entre la période sidérale T et la période apsidale T_k, prenons comme point de départ l'intégrale première

$$\text{(VI.67)} \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \text{const.}$$

déduite de la fonction

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\Phi\beta^2 + \psi,$$

à cause de la cyclicité de la variable θ.

On doit remarquer ici qu'on peut remplacer la constante par a qui en diffère d'une quantité d'ordre supérieur et l'on a

$$\text{(VI.67')} \qquad \Phi r^2 \frac{d\theta}{ax^0} = \frac{l}{a},$$

d'où l'on déduit que

$$\text{(VI.68)} \qquad dt = \frac{a}{lc}(1 + 4\gamma) r^2 \, d\theta.$$

L'intégration étendue à une période de θ nous donne

$$\text{(VI.69)} \quad \mathrm{T} = \frac{a}{lc}\int_0^{2\pi+\sigma} (1 + 4\gamma) r^2 \, d\theta = \mathrm{T}_k + \frac{a}{lc}\sigma(r^2)_{\theta=0} + \frac{4a}{lc}\int_0^{2\pi} \gamma r^2 \, d\theta,$$

où

$$\text{(VI.70)} \qquad \mathrm{T}_k = \frac{n}{2\pi}$$

est la période sidérale.

Comme on sait, on a

(VI.71) $$r_{\theta=0} = a(1-e).$$

D'autre part, on a, en vertu de l'équation de Képler,

(VI.72) $$n\,dt = (1-e\cos u)\,du,$$

partant

$$\frac{4a}{lc}\int_0^{2\pi}\gamma r^2\,d\theta = \frac{4}{n}\int_0^{T_k}\gamma n\,dt = \frac{4}{n}\frac{l}{r}\frac{r}{a}\int_0^{2\pi}du = \frac{8\pi l}{an}.$$

Donc

(VI.73) $$T = T_k + \frac{8\pi l}{an} + \frac{\sigma}{C}a^2(1-e)^2.$$

Transformons le dernier terme en rappelant que

(VI.74) $$\frac{a^2}{C} = \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}.$$

On a

$$\sigma\frac{(1-e)^2}{n\sqrt{1-e^2}} = 6\pi l\left(1+\frac{1}{3}p\right)\frac{(1-e)^2}{an(1-e^2)\sqrt{1-e^2}} = T_k\frac{3l}{a}\left(1+\frac{1}{3}p\right)\frac{(1-e)^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Enfin

(VI.75) $$T = T_k(1+b),$$

ayant posé

(VI.76) $$b = \frac{l}{a}\left[4+3\left(1+\frac{1}{3}p\right)\frac{\sqrt{1-e}}{(1-e)^{\frac{3}{2}}}\right],$$

petite quantité numérique définie en fonction des éléments a, e de l'orbiteképlérienne osculatrice, l étant le rayon gravitationnel et p le produit $\lambda_0\lambda_1$.

3. Mouvement du centre de gravité.

1. L'accélération du centre de gravité en seconde approximation. — Si l'on rappelle que

$$\lambda_h = \frac{m_h}{m} \quad (h=0,1),$$

en désignant par $\mathbf{w}$ la vitesse absolue du centre de gravité, on a

(VI.77) $$w_i = \lambda_h\dot\beta_{h|i} + \lambda_{h+1}\dot\beta_{h+1|i}.$$

Comme nous l'avons déjà maintes fois remarqué, le second membre est nul dans l'approximation newtonienne. Pour évaluer la correction einsteinienne, il suffit évidemment de pousser le calcul, en tenant compte des termes d'ordre immédiatement supérieur. D'après nos équations relativistiques (§ 1, n° 2) du mouvement absolu des deux corps, on a d'abord

$$\text{(VI.78)} \qquad \dot{w}_i = B_{h|i}(\lambda_h \mathfrak{N}_h) + B_{h+1|i}(\lambda_{h+1}\mathfrak{N}_{h+1}) = -\lambda_h B_{i|h}\mathcal{O}_h - \lambda_{p+1} B_{h+1|i}\mathcal{O}_{h+1}.$$

Posons-y maintenant

$$\text{(VI.79)} \qquad \delta = (-1)^h(\lambda_h - \lambda_{h+1}) = \lambda_0 - \lambda_1$$

et utilisons les expressions calculées des opérateurs lagrangiens (§ 2, n°s 4 et 7).

On trouve

$$\begin{aligned}
\text{(VI.80)} \quad \dot{w}_i = {} & (-1)^h p(\lambda_{h+1}^2 + \lambda_{h+1}) B_i\left(\frac{1}{2}\gamma\beta^2 - e\gamma\right) \\
& + (-1)^{h+1} p(\lambda_h^2 + \lambda_h) B_i\left(\frac{1}{2}\gamma\beta^2 - e\gamma\right) \\
& + (-1)^h p(1 + \lambda_{h+1}) B_i\left(-\frac{1}{2}\gamma^2\right) \\
& + (-1)^{h+1} p(1 + \lambda_h) B_i\left(-\frac{1}{2}\gamma^2\right) + (-1)^h(1 + \lambda_h) B_i(\beta^2\gamma) \\
& + (-1)^h p\left(p - \frac{1}{2}\lambda_h^2\right) B_i(\gamma^2 + 2e\gamma) + (-1)^{h+1} p(1 + \lambda_{h+1}) B_i(\beta^2\gamma) \\
& + (-1)^{h+1} p\left(p - \frac{1}{2}\lambda_{h+1}^2\right) B_i(\gamma^2 + 2e\gamma) + (-1)^h B_i\left(\frac{1}{6}\frac{\gamma^3}{a^2}\right) \\
& + (-1)^{h+1} p B_i\left(\frac{1}{6}\frac{\gamma^3}{a^2}\right) \\
= {} & -2p\,\delta B_i\left(\frac{1}{2}\beta^2\gamma - e\gamma\right) - p\,\delta B_i\left(-\frac{1}{2}\gamma^2\right) \\
& + p\,\delta B_i(\beta^2\gamma) - \frac{1}{2}p\,\delta B_i(\gamma^2 + 2e) \\
= {} & p\,\delta B_i(e\gamma) = -ep\,\delta\frac{\partial\gamma}{\partial x^i}.
\end{aligned}$$

2. Absence de terme séculaire. — Or, on a

$$\frac{d\theta}{dx^0} = \frac{l}{a}\frac{1}{r^2},$$

donc

$$\text{(VI.81)} \qquad \dot{w}_i = \frac{dw_i}{d\theta}\frac{d\theta}{dx^0} = \frac{l}{a}\frac{1}{r^2}\frac{dw_i}{d\theta} = -ep\,\delta l\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x^i}$$

et par conséquent

(VI.82) $$\frac{dw_i}{d\theta} = eap\,\delta\,\frac{\partial r}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

c'est-à-dire

(VI.83) $$\frac{dw_1}{d\theta} = h\cos\theta, \qquad \frac{dw_2}{d\theta} = h\sin\theta, \qquad \frac{dw_3}{d\theta} = 0,$$

ayant posé

(VI.84) $$h = eap\,\delta.$$

On conclut que l'accélération du centre de gravité appartient toujours au plan des orbites et dépend périodiquement de θ, qui est à son tour fonction périodique du temps, ce qui entraîne l'absence de terme séculaire : résultat conforme aux conclusions qui ont été établies par différentes voies, d'un côté par M. Robertson, d'après une théorie nouvelle d'Einstein et par MM. Eddington et Clark d'un autre côté.

4. Extension de l'artifice du paragraphe 1 faisant ressortir le principe d'effacement dans le problème des n corps.

Nous avons annoncé (Chap. V, § 4, n° 6) qu'il est possible, par une petite altération des constantes λ qui caractérisent les masses, dans notre approximation, de réduire le problème relativistique de plusieurs corps gravitants à celui du mouvement de points matériels dominé par une fonction de Lagrange convenable.

En d'autres termes, on peut donner une réalisation effective de ce que M. Brillouin a appelé, comme il a été déjà dit, le principe d'effacement d'après lequel, en Mécanique relativistique aussi, tout se passe comme si chaque corps du système n'exerçait aucune influence sur le mouvement de son centre de gravité, sous certaines conditions à caractériser.

Nous avons démontré que cela est possible dans le cas de deux corps, cas qui a été développé au Chapitre VI.

Maintenant nous nous proposons de démontrer que le principe d'effacement est réalisable en général par le même artifice qu'on a employé pour le problème des deux corps.

On introduit pour chaque corps C_h une constante du premier ordre σ_h. La fonction

$$(1 + \sigma_h)\,\mathcal{L}_h$$

qui se réduit à

$$(1+\sigma_h)\mathfrak{N}_h+\mathfrak{D}'_h+\mathfrak{D}''_h,$$

à de termes d'ordre supérieur près, donne lieu aux mêmes équations que celles de notre problème.

Or on peut (et dans cette possibilité consiste l'importance de l'artifice) déterminer les constantes σ_h de manière que le $2n$ constantes ϖ_h, χ_h, qui dépendent de l'extension et de la structure des corps, n'interviennent pas non plus dans les équations différentielles du mouvement.

Pour le voir, il suffit d'envisager seulement l'expression

$$(1+\sigma_h)\mathfrak{N}_p+\mathfrak{D}''_n;$$

puisque $\mathfrak{D}'_h$ est indépendante des constantes susdites.

En vertu de nos hypothèses, on peut substituer

$$\frac{1}{2}\beta_h^2+\gamma'_h$$

à $\mathfrak{N}_h$ qui en diffère par une constante additive.

Alors, si l'on tient compte des expressions de γ'_h et de $\mathfrak{D}''_h$, on a

$$\begin{aligned}(1+\sigma_h)\mathfrak{N}_h+\mathfrak{D}''_h &= \frac{1}{2}\beta_h^2+\frac{1}{2}\sigma_h\beta_h^2+l(1+\sigma_h){\sum_\nu}_0^{n-1}{}^{(h)}\frac{\lambda_\nu}{r(P_\nu, P_h)}\\ &\quad -l{\sum_\nu}_0^{n-1}{}^{(h)}\frac{\lambda_\nu(\chi_\nu+2\varpi_h)}{r(P_\nu, P_h)}-\varpi_h\beta_h^2\\ &=\frac{1}{2}\beta_h^2+\left(\frac{1}{2}\sigma_h-\varpi_h\right)\beta_h^2+l{\sum_\nu}_0^{n-1}{}^{(h)}\frac{\lambda_\nu(1-\chi_\nu)+\lambda_\nu(\sigma_h-2\varpi_h)}{r(P_\nu, P_h)}.\end{aligned}$$

Il suffit évidemment de poser

$$\sigma_h=2\varpi_h\qquad(h=0,1,\ldots,n-1)$$

pour avoir

$$(1+\sigma_h)\mathfrak{N}_h+\mathfrak{D}''_h=\frac{1}{2}\beta_h^2+l{\sum_\nu}_0^{n-1}{}^{(h)}\frac{\lambda'_\nu}{r(P_\nu, P_h)},$$

avec

$$\lambda'_\nu=\lambda_\nu(1-\chi_\nu)\qquad(\nu=0,1,\ldots,\nu-1).$$

Comme on sait, les constantes ϖ_h, χ_h sont bien du premier ordre; d'autre part les termes de $\mathfrak{D}'_h$ sont tous d'ordre supérieur, ce qui

permet d'y remplacer les λ par λ'. Après quoi, il est loisible de supprimer partout l'accent Donc, nous aboutissons à ce résultat fondamental :

Dans le problème relativistique de plusieurs (disons n) corps gravitants, on peut faire dépendre le mouvement de chaque corps P_h du système d'une fonction de Lagrange $\overline{\mathcal{L}}_h (h = 0, 1, \ldots, n-1)$ qui a la structure suivante :

$$\overline{\mathcal{L}}_h = \mathfrak{N}_h + \mathfrak{D}_h,$$

où

$$\mathfrak{N}_h = \frac{1}{2}\beta_h^2 + \gamma_h,$$

$$\gamma_h = l \sum_0^{n-1}{}'^{(h)}_\nu \frac{\lambda_\nu}{r(P_\nu, P_h)};$$

$$D_h = \frac{1}{2}\mathfrak{N}_h^2 - \gamma_h^2 + \zeta_h + \gamma_h \beta_h^2 - 4\sum_i \gamma_{h|i}\beta_{h|i},$$

$$\zeta_h = \varphi_h + \psi_h + \upsilon_h,$$

$$\varphi_h = -l^2 \sum_0^{n-1}{}'^{(h)}_\nu \frac{\lambda_\nu}{r(P_\nu, P_h)} \sum_0^{n-1}{}'^{(\nu)}_\rho \frac{\lambda_\rho}{r(P_\nu, P_\rho)},$$

$$\psi_h = \frac{3}{2} l \sum_0^{n-1}{}'^{(h)}_\nu \frac{\lambda_\nu \beta_\nu^2}{r(P_\nu, P_h)},$$

$$\upsilon_h = \frac{1}{2} l \frac{\partial^2}{\partial x^{0^2}} \sum_0^{n-1}{}'^{(h)}_\nu \lambda_\nu r(P_\nu, P_h),$$

$$\gamma_{h|i} = l \sum_0^{n-1}{}'^{(h)}_\nu \frac{\lambda_\nu \beta_{h|i}}{r(P_\nu, P_h)},$$

l'extension et la structure des corps n'intervenant que par les paramètres λ qui diffèrent fort peu des masses $\left(\text{rapportées à la masse totale du système, de sorte que } \sum_0^{n-1}{}_h \lambda_h = 1\right)$.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE II.

Nature analytique des équations du mouvement gravitationnel d'un milieu continu désagrégé.

1. *Fonctions inconnues et équations.*

2. *Coordonnées isométriques. Réduction à la forme normale.*

CHAPITRE III.

Critères d'approximation et équations réduites.

1. *Ordres de grandeur et emploi autant que possible de quantités sans dimensions.*

2. *Réduction des équations et intégration par des potentiels*

CHAPITRE IV.

Efforts intérieurs et possibilité de s'en passer dans l'approximation envisagée.

1. Le tenseur énergétique.
Pression et son invariance le long des lignes horaires dans le cas des corps célestes.

2. Retour aux équations du mouvement.

3. Conséquences globales pour chaque corps.

CHAPITRE V.

Réduction a des équations différentielles ordinaires.

1. Fonction de Lagrange

2. Entourage immédiat du point mobile.

3. Quelques compléments de Mécanique ordinaire.

4. Hypothèses ultérieures amenant à des équations différentielles ordinaires.

5. Le problème des n corps.

CHAPITRE VI.

Le problème des deux corps.
Extension du principe d'effacement au cas général de *n* corps.

1. La fonction de Lagrange du mouvement absolu de chacun des deux corps.

2. Mouvement relatif.

134875. Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands-Augustins.